Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
Департамент научно-технической политики и образования
Волгоградская государственная сельскохозяйственная академия
Кафедра высшей математики

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Методическое пособие

Волгоград
2005

Криволинейные интегралы. Методическое пособие / Сост. Е. А. Ветренко, Ю. В. Клочков; Волгогр. гос. с.-х. акад. – Волгоград, 2005. – 20 с.

Излагаются основные теоретические сведения, приводятся образцы решения типичных задач. Даны варианты индивидуальных заданий.

Для студентов инженерных специальностей.

1. СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1.1. Криволинейный интеграл первого рода

Если кривая L задана уравнением $y = y(x); a \le x \le b$, то криволинейный интеграл 1-го рода вычисляется по формуле

$$\int\limits_L f(x;y)dl = \int\limits_a^b f\big(x;y(x)\big)\sqrt{1+(y')^2}\,dx. \qquad (1)$$

Аналогично, если кривая L задана уравнением $x = x(y); c \le y \le d$, то криволинейный интеграл 1-го рода вычисляется по формуле

$$\int\limits_L f(x;y)dl = \int\limits_c^d f\big(x(y);y\big)\sqrt{1+(x')^2}\,dy. \qquad (2)$$

Если кривая L задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$; $y = y(t)$; $t_1 \le t \le t_2$, то криволинейный интеграл 1-го рода равен:

$$\int\limits_L f(x;y)dl = \int\limits_{t_1}^{t_2} f\big(x(t);y(t)\big)\sqrt{\left(x'_t\right)^2+\left(y'_t\right)^2}\,dt. \qquad (3)$$

Аналогично для пространственной кривой L, заданной уравнениями $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$; $t_1 \le t \le t_2$, криволинейный интеграл 1-го рода от функции трех переменных вычисляется по формуле:

$$\int\limits_L f(x;y;z)dl = \int\limits_{t_1}^{t_2} f\big(x(t);y(t);z(t)\big)\sqrt{\left(x'_t\right)^2+\left(y'_t\right)^2+\left(z'_t\right)^2}\,dt. \qquad (4)$$

Если кривая L задана в полярной системе координат уравнением $r = r(\varphi); \alpha \le \varphi \le \beta$, то криволинейный интеграл 1-го рода равен:

$$\int\limits_L f(x;y)dl = \int\limits_\alpha^\beta f\big(r(\varphi)\cos\varphi; r(\varphi)\sin\varphi\big)\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}\,d\varphi. \qquad (5)$$

Если кривая L имеет линейную плотность $\rho = \rho(x;y) > 0$, то криволинейный интеграл 1-го рода $\int\limits_L \rho(x;y)dl$ представляет собой массу этой кривой, т.е.

$$M = \int\limits_L \rho(x;y)dl \qquad (6)$$

(*физический смысл криволинейного интеграла 1-го рода*).

Свойства криволинейного интеграла 1-го рода

1. Криволинейный интеграл 1-го рода не зависит от направления обхода контура L, т.е. $\int\limits_{L_+} f(x;y)dl = \int\limits_{L_-} f(x;y)dl$.

2. $\int\limits_L [f_1(x;y) \pm f_2(x;y)]dl = \int\limits_L f_1(x;y)dl \pm \int\limits_L f_2(x;y)dl$.

3. $\int\limits_L cf(x;y)dl = c\int\limits_L f(x;y)dl; c = const$.

4. Если контур интегрирования L состоит из двух частей L_1 и L_2, то $\int\limits_L f(x;y)dl = \int\limits_{L_1} f(x;y)dl + \int\limits_{L_2} f(x;y)dl$.

1.2. Криволинейный интеграл второго рода

Если кривая L задана уравнением $y = y(x); a \le x \le b$, то криволинейный интеграл 2-го рода вычисляется по формуле

$$\int\limits_L P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \int\limits_a^b [P(x;y(x)) + Q(x;y(x))y'(x)]dx. \qquad (7)$$

Если уравнение кривой L имеет вид $x = x(y); c \le y \le d$, то криволинейный интеграл 2-го рода равен:

$$\int\limits_L P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \int\limits_c^d [P(x(y);y))x'(y) + Q(x(y);y)]dy. \qquad (8)$$

В случае параметрического задания кривой L уравнениями $x = x(t)$; $y = y(t)$; $t_1 \le t \le t_2$ формула для вычисления криволинейного интеграла 2-го рода имеет вид:

$$\int\limits_L P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \int\limits_{t_1}^{t_2} [P(x(t);y(t))x'(t) + Q(x(t);y(t))y'(t)]dt. \qquad (9)$$

Криволинейный интеграл 2-го рода по пространственной кривой L, заданной уравнениями $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$; $t_1 \le t \le t_2$ вычисляется по формуле:

$$\int\limits_L P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)dz =$$
$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} [P(x(t);y(t);z(t))x'(t) + Q(x(t);y(t);z(t))y'(t) + R(x(t);y(t);z(t))z'(t)]dt. \qquad (10)$$

Криволинейный интеграл 2-го рода представляет собой работу, которую совершает сила $\bar{F} = P(x;y)\bar{i} + Q(x;y)\bar{j}$ при перемещении материальной точки по кривой L, т.е. работа равна

$$A = \int\limits_L P(x;y)dx + Q(x;y)dy \qquad (11)$$

(*физический смысл криволинейного интеграла 2-го рода*).

Свойства криволинейного интеграла 2-го рода

1. При изменении направления обхода кривой L криволинейный интеграл 2-го рода меняет знак на противоположный, т.е.

$$\int\limits_{L_+} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = -\int\limits_{L_-} P(x;y)dx + Q(x;y)dy.$$

2. Если кривая L состоит из двух частей L_1 и L_2, то

$$\int_L P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \int_{L_1} P(x;y)dx + Q(x;y)dy + \int_{L_2} P(x;y)dx + Q(x;y)dy.$$

Если выполняется равенство $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то подынтегральное выражение $P(x;y)dx + Q(x;y)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $u = u(x;y)$, т.е. $du = P(x;y)dx + Q(x;y)dy$. Тогда функцию $u(x;y)$ по заданному полному дифференциалу $du = P(x;y)dx + Q(x;y)dy$ можно найти по формуле

$$u(x;y) = \int_{x_0}^{x} P(x;y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x;y)dy + C,\ \mathrm{C} = \mathrm{const}. \qquad (12)$$

Замечание: за начальную точку $M_0(x_0;y_0)$ принимают любую точку, в которой определены функции $P(x;y);Q(x;y)$.

Теорема: Если функции $P(x;y);Q(x;y)$ непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y};\frac{\partial Q}{\partial x}$ в замкнутой области D, ограниченной контуром L, то справедлива ***формула Грина***:

$$\oint_L P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy, \qquad (13)$$

причем интегрирование по контуру L производится в положительном направлении обхода кривой.

2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1: Вычислить криволинейный интеграл 1-го рода вдоль кривой L

$$\int_L \frac{y+3}{x}dl \qquad \text{L: } y = 2x^2 - 3 \text{ от A(1;-1) до B(2; 5).}$$

Решение: Так как кривая L задана уравнением $y = 2x^2 - 3; 1 \le x \le 2$ и $y' = \left(2x^2 - 3\right)' = 4x$, то по формуле (1) получаем:

$$\int_L \frac{y+3}{x}dl = \int_1^2 \frac{2x^2 - 3 + 3}{x}\sqrt{1 + (4x)^2}\,dx = \int_1^2 2x\sqrt{1 + 16x^2}\,dx = \frac{1}{16}\int_1^2 \left(1 + 16x^2\right)^{1/2} d\left(1 + 16x^2\right) =$$

$$= \frac{1}{16}\frac{\left(1 + 16x^2\right)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_1^2 = \frac{1}{24}\left(65\sqrt{65} - 17\sqrt{17}\right).$$

Задача 2: Найти массу дуги окружности $x^2 + y^2 = 2y; x \ge 0; y \ge 0$, если линейная плотность $\rho(x;y) = x$.

Решение: Так как кривая L представляет собой окружность, то ее уравнение удобно записать в полярной системе координат. По правилу перехода от декартовой системы координат к полярной $x = r\cos\varphi; y = r\sin\varphi$. Тогда уравнение окружности имеет вид $r = 2\sin\varphi$. По условию $x \ge 0; y \ge 0$, следовательно, угол φ изменяется в пределах $0 \le \varphi \le \pi/2$.

Таким образом, искомая масса

$M=\int_L \rho(x;y)dl=\int_L xdl$, где L: $r=2\sin\varphi; 0\le\varphi\le\pi/2$.

По формуле (5) получаем

$$M=\int_0^{\pi/2} 2\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{(2\sin\varphi)^2+(2\sin\varphi)'^2}\,d\varphi=\int_0^{\pi/2}\sin(2\varphi)\sqrt{4\sin^2\varphi+4\cos^2\varphi}\,d\varphi=$$

$$=2\int_0^{\pi/2}\sin(2\varphi)d\varphi=-\cos(2\varphi)\Big|_0^{\pi/2}=-\cos\pi+\cos0=1+1=2.$$

Задача 3: Вычислить криволинейный интеграл вдоль контура L

$\int_L (x+2y)dx+(z-2x)dy+2ydz$ L: отрезок прямой AB A(1; 1; 1) B(2; 3; 0).

Решение: Составим уравнение прямой AB как уравнение прямой в пространстве, проходящей через 2 заданные точки. Из курса аналитической геометрии известно, что это уравнение имеет вид:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Подставив в формулу координаты точек A и B, получим:

$$\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-1}{3-1}=\frac{z-1}{0-1}.$$

Преобразуем полученное уравнение и приведем его к параметрическому виду: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-1}=t\Rightarrow x=t+1;\ y=2t+1;\ z=-t+1$.

Подставив в полученные параметрические уравнения координаты точек A и B, найдем значения параметра t. Таким образом, получаем, что $t_1=0; t_2=1$, т.е. значения параметра на отрезке AB изменяются в пределах $0\le t\le1$.

Таким образом, кривая L задана параметрическими уравнениями $x=t+1;\ y=2t+1;\ z=-t+1; 0\le t\le1$.

Тогда по формуле (10) для вычисления криволинейного интеграла 2-го рода получаем:

$$\int_L (x+2y)dx+(z-2x)dy+2ydz=\int_0^1\left[(t+1+2(2t+1))+(-t+1-2(t+1))\cdot2+2(2t+1)\cdot(-1)\right]dt=$$

$$=\int_0^1[5t+3-6t-2-4t-2]dt=\int_0^1(-5t-1)dt=\left(-\frac{5t^2}{2}-t\right)\Bigg|_0^1=-\frac{5}{2}-1=-\frac{7}{2}=-3{,}5.$$

Задача 4: Найти работу, совершаемую силой $\overline{F}(x^2y;x-y)$ при перемещении точки по кривой L: $y=x^2-2$ от A(0; -2) до B(1; -1).

Решение: Из физического смысла криволинейного интеграла 2-го рода по формуле (11) следует, что искомая работа равна:

$$A=\int_L x^2ydx+(x-y)dy.$$

Вычислим криволинейный интеграл 2-го рода по кривой L, заданной уравнением $y = x^2 - 2$. По условию от точки A(0; -2) до точки B(1; -1) переменная x изменяется в пределах от 0 до 1. Тогда по формуле (7) получаем:

$$A = \int_L x^2 y dx + (x - y)dy = \int_0^1 \left[x^2(x^2 - 2) + \left(x - (x^2 - 2)\right) \cdot \left(x^2 - 2\right)' \right] dx =$$

$$= \int_0^1 \left[x^4 - 2x^2 + \left(x - x^2 + 2\right) 2x \right] dx = \int_0^1 \left[x^4 - 2x^2 + 2x^2 - 2x^3 + 4x \right] dx = \int_0^1 \left(x^4 - 2x^3 + 4x \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^5}{5} - \frac{2x^4}{4} + \frac{4x^2}{2} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + 2 = -1{,}7.$$?

Задача 5: Вычислить интеграл по формуле Грина

$\int_L 3yxdy - x^2 dx$ L: контур треугольника ABC A(0; 1); B(2; 2); C(0; 4).

Решение: По формуле Грина вычисление криволинейного интеграла 2-го рода сводится к вычислению двойного интеграла:

$$\int_L P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

По условию $Q(x;y) = 3yx; P(x;y) = -x^2$. Следовательно, частные производные равны $\frac{\partial Q}{\partial x} = 3y; \frac{\partial P}{\partial y} = 0$.

Для расстановки пределов интегрирования в двойном интеграле построим в координатной плоскости хоу треугольник ABC (рис. 1) и запишем уравнения его сторон.

Сторона AC имеет уравнение $x = 0$. Найдем уравнения сторон AB и BC по формуле: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

Получаем:

AB: $\frac{x - 0}{2 - 0} = \frac{y - 1}{2 - 1} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y - 1}{1} \Rightarrow y = \frac{x}{2} + 1$.

BC: $\frac{x - 2}{0 - 2} = \frac{y - 2}{4 - 2} \Rightarrow \frac{x - 2}{-2} = \frac{y - 2}{2} \Rightarrow y = -x + 4$.

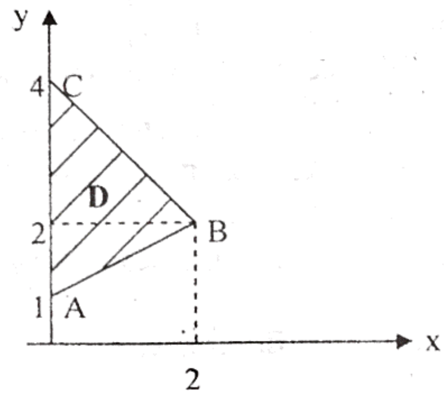

Рис. 1

Таким образом, из графика видно, что в области D переменная x изменяется от 0 до 2, а переменная y – от $y_1 = \frac{x}{2} + 1$ до $y_2 = -x + 4$.

Тогда по формуле Грина получаем:

$$\int\limits_L 3yxdy - x^2dx = \iint\limits_D 3ydxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{\frac{x}{2}+1}^{-x+4} 3ydy = \int\limits_0^2 dx \frac{3}{2} y^2 \Big|_{\frac{x}{2}+1}^{-x+4} = \frac{3}{2}\int\limits_0^2 \left[(-x+4)^2 - \left(\frac{x}{2}+1\right)^2\right]dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int\limits_0^2 \left(x^2 - 8x + 16 - \frac{x^2}{4} - x - 1\right)dx = \frac{3}{2}\int\limits_0^2 \left(\frac{3x^2}{4} - 9x + 15\right)dx = \frac{3}{2}\left(\frac{x^3}{4} - \frac{9x^2}{2} + 15x\right)\Big|_0^2 =$$

$$= \frac{3}{2}(2 - 18 + 30) = \frac{3}{2} \cdot 14 = 21.$$

Задача 6: Найти функцию по заданному полному дифференциалу

$$du = e^{-y}dx - \left(2y + xe^{-y}\right)dy.$$

Решение: По условию $P(x;y) = e^{-y}; Q(x;y) = -\left(2y + xe^{-y}\right)$. Следовательно, частные производные равны $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -e^{-y}$, и выражение $e^{-y}dx - \left(2y + xe^{-y}\right)dy$ действительно является полным дифференциалом некоторой функции u(x; y).

Для нахождения функции по полному дифференциалу du выберем начальную точку. За начальную точку примем точку O(0; 0). Функции $P(x;y); Q(x;y)$ в этой точке определены и непрерывны.

По формуле (12) искомая функция u(x;y) равна:

$$u(x;y) = \int\limits_0^x P(x;0)dx + \int\limits_0^y Q(x;y)dy + C = \int\limits_0^x dx - \int\limits_0^y \left(2y + xe^{-y}\right)dy + C = x\Big|_0^x - \left(y^2 - xe^{-y}\right)\Big|_0^y + C =$$

$$= x - y^2 + xe^{-y} - x + C = -y^2 + xe^{-y} + C; C = const$$

Таким образом, $u(x;y) = -y^2 + xe^{-y} + C$.

3. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

В приведенных ниже вариантах выполнить следующие задания:

1) вычислить криволинейный интеграл первого рода вдоль кривой L;
2) вычислить криволинейный интеграл второго рода вдоль кривой L;
3) найти массу дуги L, если задана линейная плотность $\rho(x;y)$;
4) найти работу силы $\overline{F}$ при перемещении точки вдоль кривой L;
5) вычислить интеграл по формуле Грина (интегрирование производится в положительном направлении);
6) найти функцию $u(x;y)$ по заданному полному дифференциалу.

Вариант 1

1. $\int\limits_L (x+y)dl$ L: отрезок AB A(1; 1); B(2;3).

2. $\int\limits_L (y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz$ L: $x=\sin^2 t; y=\sin 2t; z=\cos^2 t; 0\le t\le\pi$.

3. L: отрезок AB A(1; 2); B(3; 6); $\rho(x;y)=2x+y$.

4. $F(x-y; y^2x)$ L: прямая AB A(-2;1) B(0;5).

5. $\int\limits_L (xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy$ L: $x^2+y^2=4x$.

6. $du=4(x^2-y^2)xdx-4(x^2-y^2)ydy$.

Вариант 2

1. $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2}}$ L: $y=\frac{x}{2}-2$ от точки A(0; -2) до точки B(4;0).

2. $\int\limits_L xdy+ydx$ L: $x=3\cos t; y=3\sin t; 0\le t\le \pi/2$.

3. L: $y^2=\frac{4}{9}x^3$ от A(3; $2\sqrt{3}$) до B(8; $\frac{32\sqrt{2}}{3}$); $\rho(x;y)=\frac{y}{\sqrt{x}}$.

4. $\overline{F}(4x-5y; 2x+y)$ L: ломаная AQB A(1; -9); B(1;1); Q(3; -9).

5. $\int\limits_L y^2dx-2xydy$ L: $x^2+y^2=2y$.

6. $du=(e^y+x)dx+(xe^y-2y)dy$.

Вариант 3

1. $\int\limits_L (x+y)dl$ L: граница треугольника ABC A(0;0); B(1;0); C(0;1).

2. $\int\limits_L (y^2-z^2)dx+2yzdy-x^2dz$ L: $x=t; y=t^2; z=t^3; 0\le t\le 1$.

3. L: $x=2(t-\sin t); y=2(1-\cos t); 0\le t\le 2\pi; \rho(x;y)=\sqrt{y^3}$.

4. $\overline{F}\left(\frac{y}{x^2+y^2}; \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ L: $y=x; 1\le x\le 2$.

5. $\int\limits_L (x+y)^2dx-(x^2+y^2)dy$ L: контур ΔABC A(1;1); B(3;2); C(2;5).

6. $du=(e^{x+y}+\cos(x-y))dx+(e^{x+y}-\cos(x-y)+2)dy$.

Вариант 4

1. $\int\limits_L (2x+y)dl$ L: ломаная ABOA A(1;0); B(0;2); O(0;0).

2. $\int\limits_L ydx+\frac{x}{y}dy$ L: $y=e^{-x}$ от точки A(0;1) до точки B(-1;e).

3. L: $y=2x^2$ от точки A(1;2) до точки B(2;8); $\rho(x;y)=y/x$.

4. $\overline{F}(yz; xz; xy)$ L: $x=4\cos t; y=4\sin t; z=2t; 0\le t\le 2\pi$.

5. $\int\limits_L 3xydy+y^2dx$ L: $x^2+y^2=2y$.

6. $du=(y+\ln(x+1))dx+(x+1-e^y)dy$.

Вариант 5

1. $\int\limits_L x^2 dl$ L: $x^2 + y^2 = 16; y \ge 0$.
2. $\int\limits_L (x^2 - y)dx - (x - y^2)dy$ L: $x = 5\cos t; y = 5\sin t$ от точки A(5;0) до B(0;5).
3. L: отрезок AB A(1;0); B(4;6); $\rho(x;y) = \dfrac{\sqrt{y+2}}{x}$.
4. $\overline{F}(-y;x)$ L: $x = 2\cos^3 t; y = 2\sin^3 t; 0 \le t \le 2\pi$.
5. $\int\limits_L e^x[(1-\cos y)dx + (\sin y - y)dy]$ L: граница области $0 < x < \pi; 0 < y < \sin x$.
6. $du = \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)dx + \left(\dfrac{2}{y} - \dfrac{x}{y^2}\right)dy$.

Вариант 6

1. $\int\limits_L ydl$ L: арка циклоиды $x = 2(t - \sin t); y = 2(1-\cos t); 0 \le t \le 2\pi$.
2. $\int\limits_L xydy$ L: периметр треугольника, образованного прямыми y = x; x = 2; Y = 0 (в положительном направлении).
3. L: $y = \dfrac{2x\sqrt{x}}{3}$ от O(0;0) до A(4;16/3), если плотность $\rho(x;y)$ пропорциональна длине дуги кривой.
4. $\overline{F}(x\sqrt{y}; yx^2)$ L: $y = 4x^2$ от A(1;4) до B(2;16).
5. $\int\limits_L e^{y^2-x^2}(\cos 2xydx + \sin 2xydy)$ L: $x^2 + y^2 = 9$.
6. $du = (4x^3y^3 - 3y^2 + 8)dx + (3x^4y^2 - 6xy - 1)dy$.

Вариант 7

1. $\int\limits_L y^2 dl$ L: арка циклоиды $x = 3(t - \sin t); y = 3(1 - \cos t); 0 \le t \le 2\pi$.
2. $\int\limits_L xydx$ L: $y = \sin x$ от $x = \pi$ до $x = 0$.
3. L: окружность $x = \cos t; y = \sin t; \rho(x;y) = y$.
4. $\overline{F}(0; -x^2)$ L: $y^2 = 1 - x$ от A(1;0) до B(0;1).
5. $\int\limits_L (e^x \sin y - y)dx + (e^x \cos y - 1)dy$ L: $x^2 + y^2 = 2x; y > 0$.
6. $du = (2e^{2x} + y + \sin y)dx + (e^{3y} + x + x\cos y)dy$.

Вариант 8

1. $\int\limits_L (x^2 + y^2)dl$ L: $x = 2(\cos t + t\sin t); y = 2(\sin t - t\cos t); 0 \le t \le 2\pi$.
2. $\int\limits_L \left(x - \dfrac{1}{y}\right)dy$ L: $y = x^2$ от A(1;1) до B(2;4).

3. L: $x^2 + y^2 = 4x; \rho(x;y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

4. $\overline{F}(xy; x+y)$ L: $y = x$ от A(0;0) до B(1;1).

5. $\int\limits_L \frac{dx - dy}{x + y}$ L: граница квадрата ABCD A(1;0); B(0;1); C(-1;0); D(0;-1).

6. $du = \left(1 - e^{x-y} + \cos x\right)dx + \left(e^{x-y} + \cos y\right)dy$.

Вариант 9

1. $\int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2}\,dl$ L: $x = 4(\cos t + t\sin t); y = 4(\sin t - t\cos t); 0 \le t \le 2\pi$.

2. $\int\limits_L (2a - y)dx + (y - a)dy$ L: $x = a(t - \sin t); y = a(1 - \cos t); 0 \le t \le 2\pi$.

3. L: $x = 5\cos t; y = 5\sin t; 0 \le t \le \pi; \rho(x;y) = x^2$.

4. $\overline{F}(xy; x-y)$ L: $y = x^2$ от A(0;0) до B(1;1).

5. $\int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2}\,dx + y\left(xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})\right)dy$ L: $x^2 + y^2 = 1$.

6. $du = (\sin x - \cos y)dx + (x\sin y + 1)dy$.

Вариант 10

1. $\int\limits_L z\,dl$ L: $x = t\cos t; y = t\sin t; z = t; 0 \le t \le 2\pi$.

2. $\int\limits_L y\,dx - x\,dy$ L: $x = a\cos t; y = b\sin t; 0 \le t \le 2\pi$.

3. L: отрезок прямой AB A(0;0) B(2;6); $\rho(x;y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2}}$.

4. $\overline{F}(4x - 2y; 2x + 3y)$ L: ломаная ABC A(1;-9); C(3;-3); B(1;-3).

5. $\int\limits_L x^2 y\,dx - xy^2\,dy$ L: $x^2 + y^2 = 4$.

6. $du = (2x\sin y + y\cos x + 2x)dx + \left(x^2\cos y + \sin x - \sin y - 3y^2\right)dy$.

Вариант 11

1. $\int\limits_L \frac{dl}{y - x}$ L: отрезок прямой AB A(0;-2) B(4;0). $(-\sqrt{5}\ln 2)$

2. $\int\limits_L y\,dx + z\,dy + x\,dz$ L: $x = 3\cos t; y = 3\sin t; z = 2t; 0 \le t \le 2\pi$. -9π

3. L: $x = a\cos^3 t; y = a\sin^3 t; 0 \le t \le \pi/2; \rho(x;y) = \sqrt[3]{y}$.

4. $\overline{F}\left(\frac{1}{y}; -\frac{1}{x}\right)$ L: $x = 3\cos t; y = 3\sin t; 0 \le t \le \pi$.

5. $\int\limits_L \left(y - x^2\right)dx + \left(x + y^2\right)dy$ L: $x^2 + y^2 = 4; y \ge 0; x \ge 0$.

6. $du = \left(2xye^{x^2} + \ln y\right)dx + \left(e^{x^2} + \frac{x}{y} + e^y\right)dy$.

Вариант 12

1. $\int\limits_L xdl$ L: $y = x^2$ от A(2;4) до B(1;1).
2. $\int\limits_L xy^2dx + x^2ydy$ L: $x = \cos t; y = \sin t; 0 \le t \le \pi/2$.
3. L: $x = 3\cos t; y = 3\sin t; 0 \le t \le \pi/2; \rho(x;y) = xy$.
4. $\overline{F}(2xy;-y)$ L: $y = x^2 - 1$ от A(1;0) до B(2;3).
5. $\int\limits_L 4(x + y^2)dx + 2(x - y)dy$ L: контур треугольника ABC A(1;1) B(2;2) C(1;3).
6. $du = (\sin 2x - x\ln y)dx - \left(\sin 2y + \dfrac{x^2}{2y}\right)dy$.

Вариант 13

1. $\int\limits_L \dfrac{x+y}{x+2}dl$ L: $y = 2x - 1; -1 \le x \le 2$.
2. $\int\limits_L \dfrac{x}{y}dx - \dfrac{y-x}{x}dy$ L: $y = x^2$ от A(2;4) до B(1;1).
3. L: прямая AB A(-1;2) B(1; 4); $\rho(x;y) = x + 2y$.
4. $\overline{F}(3xy^2; -x - y)$ L: $y^2 = x + 1$ от A(0;1) до B(3;2).
5. $\int\limits_L -xydx + 2y^2dy$ L: $x^2 + y^2 = 25$.
6. $du = (3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy$.

Вариант 14

1. $\int\limits_L xdl$ L: $y = x^2/2; 0 \le x \le 1$. $\frac{1}{3}\left(2^{3/2} - 1\right)$
2. $\int\limits_L \dfrac{3x}{y}dx - \dfrac{2y^3}{x}dy$ L: $x = y^2$ от A(4;2) до B(1;1).
3. L: $x = at; y = \dfrac{at^2}{2}; 0 \le t \le 1; \rho(x;y) = \sqrt{2y/a}$.
4. $\overline{F}(xy; yz; zx)$ L: $x = \cos t; y = \sin t; z = 1; 0 \le t \le \pi$.
5. $\int\limits_L (x^2 + y)dx - (y^2 + x)dy$ L: контур Δ ABC A(1;2) B(1;5) C(3;5).
6. $du = (e^{2y} - 5y^3e^x)dx + (2xe^{2y} - 15y^2e^x)dy$.

Вариант 15

1. $\int\limits_L xydl$ L: $x = a\cos t; y = b\sin t; 0 \le t \le \pi/2$.
2. $\int\limits_L xydx$ L: $y = \sin x; 0 \le x \le \pi$.
3. L: $y^2 = 4x$ от A(0;0) до B(1;4); $\rho(x;y) = y$.

4. $\overline{F}(\sin(x+y);0)$ L: контур треугольника OMN O(0;0); M($\frac{\pi}{2}$;0); N(0;$\frac{\pi}{2}$) в положительном направлении обхода.

5. $\int\limits_L (1-x^2)ydx + x(1+y^2)dy$ L: $x^2+y^2=4$.

6. $du = \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}dx + \left(\frac{e^y}{1+x^2}+1\right)dy$.

Вариант 16

1. $\int\limits_L (x^2+y^2+z^2)dl$ L: $x=2\cos t; y=2\sin t; z=4t; 0\le t\le 2\pi$.
2. $\int\limits_L xydx - y^2dy$ L: $y^2=2x$ от A(0;0) до B(2;2).
3. L: $x=\ln(1+t^2); y=2arctg(t)-t; 0\le t\le 1; \rho(x;y)=ye^{-x}$.
4. $\overline{F}(\cos y;-\sin x)$ L: $y=-x$ от A(0;0) до B($-\pi/3$;$\pi/3$).
5. $\int\limits_L x^2ydx + x^2dy$ L: $x^2+y^2=4$.
6. $du = (4x^3y^3+2e^{2x})dx + (3x^4y^2 - 2\cos 2y)dy$.

Вариант 17

1. $\int\limits_L \frac{dl}{x^2+y^2+z^2}$ L: $x=a\cos t; y=a\sin t; z=bt; 0\le t\le 2\pi$.
2. $\int\limits_L x^2ydy - (y+x)dx$ L: отрезок прямой AB A(0;0) B(1;2).
3. L: $x=t; y=t^2; 0\le t\le 1; \rho(x;y)=4x$.
4. $\overline{F}(-y;x)$ L: $x=2(t-\sin t); y=2(1-\cos t)$ от A(0;0) до B(4π;0).
5. $\int\limits_L xy^3dx + yxdy$ L: $x^2+y^2=2x$.
6. $du = (y-3x^2)dx - (4y^2-x)dy$.

Вариант 18

1. $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$ L: прямая AB A(0;0) B(1;2). $\ln\frac{\sqrt{5}+3}{2}$
2. $\int\limits_L (x^2-2xy)dx + (y^2-2xy)dy$ L: $y=x^2; -1\le x\le 1$. $-\frac{14}{15}$
3. L: $y=2x+1$ от A(0;1) до B(2;5); $\rho(x;y) = (y-2x)/y$.
4. $\overline{F}(y;-2x)$ L: $x^2+y^2=1; y\ge 0$.
5. $\int\limits_L y^3dx - x^3dy$ L: $x^2+y^2=4y$.
6. $du = \left(\frac{y^2}{(x-y)^2}-\frac{1}{x}\right)dx + \left(\frac{1}{y}-\frac{x^2}{(x-y)^2}\right)dy$.

Вариант 19

1. $\int\limits_L (x+2y)dl$ L: граница треугольника ABC A(0;0); B(1;0); C(1;1).
2. $\int\limits_L \left(xy - y^2\right)dx + xdy$ L: $y = 2\sqrt{x}; 0 \le x \le 1$.
3. L: $y = 2x^2; 1 \le x \le 2; \rho(x;y) = {}^{y}\!/_{x}$.
4. $\overline{F}(0;2x)$ L: $x = 3\cos t; y = 4\sin t; y \ge 0; 0 \le t \le \pi$.
5. $\int\limits_L 6y^2dx + 2x^2ydy$ L: контур Δ ABC A(1;0); B(1;4); C(0;2).
6. $du = 2\left(3xy^2 + 2x^3\right)dx + 3\left(2x^2y + y^2\right)dy$.

Вариант 20

1. $\int\limits_L xydl$ L: граница квадрата ABCD A(1;0); B(0;1); C(-1;0); D(0;-1).
2. $\int\limits_L \cos ydx - \sin ydy$ L: $y = -x; -2\pi \le x \le -\pi$.
3. L: $x = \cos 2t; y = \sin 2t; 0 \le t \le \pi; \rho(x;y) = x^2$.
4. $\overline{F}\left(y^2x; x+y\right)$ L: ломаная AMNB A(1;0); B(-1;0); M(1;1); N(-1;1).
5. $\int\limits_L xy^2dy - x^2ydx$ L: $x^2 + y^2 = 16$.
6. $du = \dfrac{xdx + (2x+y)dy}{(x+y)^2}$.

Вариант 21

1. $\int\limits_L (2y-x)dl$ L: граница прямоугольника ABCD A(0;0); B(4;0); C(4;2); D(0;2).
2. $\int\limits_L 2xydx - x^2dy$ L: $y = \sqrt{{}^{x}\!/_{2}}; 0 \le x \le 2$.
3. L: $x = {}^{y^2}\!/_{2}$; от A(2;2) до B(4;8); $\rho(x;y) = \dfrac{x}{2y}$.
4. $\overline{F}(yx; x+2)$ L: $y = x^2 + 3$ от A(0;3) до B(1;4).
5. $\int\limits_L \left(x^3 - 2xy\right)dx + \left(x^2 + 4xy\right)dy$ L: контур ΔABC A(-1;1); B(3;1); C(1;3).
6. $du = \left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3y^2}{x^4}\right)dx - \dfrac{2y}{x^3}dy$.

Вариант 22

1. $\int\limits_L (x-y)dl$ L: $x^2 + y^2 = 4x$.
2. $\int\limits_L 2xydx + x^2dy$ L: $y = {}^{x^2}\!/_{4}; 0 \le x \le 2$.

3. L: $y=\sqrt{x}; 1 \le x \le 4; \rho(x;y)=2xy$.

4. $\overline{F}(\sqrt{y}; xy)$ L: $y=4x^2$ от A(0;0) до B(1;4).

5. $\int\limits_L -5yxdx+3xydy$ L: контур ΔABC A(0;0) B(3;0) C(1;2).

6. $du=(x\cos y - y\sin y)dy+(x\sin y+y\cos y)dx$. – ?

Вариант 23

1. $\int\limits_L (4\sqrt[3]{x}-3\sqrt{y})dl$ L: отрезок прямой AB A(-1;0) B(0;1).

2. $\int\limits_L \frac{y}{x}dx+dy$ L: $y=\ln x; 1 \le x \le e$.

3. L: $x=\frac{t^2}{2}; y=2t; 1 \le t \le 2; \rho(x;y)=\frac{4x}{y}$.

4. $\overline{F}\left(\frac{x^2}{y}; \frac{y}{x}; \cos z\right)$ L: $x=\cos t; y=\sin t; z=t$ от A(1;0;0) до B(0;0;2π).

5. $\int\limits_L xydx-y^4dy$ L: $x^2+y^2=6x$.

6. $du=\left(2xye^{x^2}+\ln y\right)dx+\left(e^{x^2}+\frac{x}{y}\right)dy$.

Вариант 24

1. $\int\limits_L ydl$ L: $y^2=2x$ от A(0;0) до B(1;2).

2. $\int\limits_L xdy-ydx$ L: $y=x^3; 0 \le x \le 2$.

3. L: $x=2\cos t; y=2\sin t; \frac{\pi}{2} \le t \le \pi; \rho(x;y)=xy$.

4. $\overline{F}(y;-x)$ L: $x=4\cos t; y=3\sin t; 0 \le t \le 2\pi$.

5. $\int\limits_L \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$ L: $x^2+y^2=9$.

6. $du=(y+x\ln y)dx+\left(\frac{x^2}{2y}+x+1\right)dy$.

Вариант 25

1. $\int\limits_L y^2dl$ L: $x=5\cos t; y=5\sin t; 0 \le t \le \pi/2$. $\frac{125\pi}{4}$;)

2. $\int\limits_L \left(x-\frac{1}{y}\right)dy-ydx$ L: $y=x^2; 1 \le x \le 2$.

3. L: $x=2y$; от A(1;2) до B(6;3); $\rho(x;y)=x^2+2xy$.

4. $\overline{F}\left(x-y; \frac{x}{y}\right)$ L: $y^2=x$ от A(1;1) до B(4;2).

5. $\int\limits_L 2y\sqrt{x}dx + 4xy^2dy$ L: контур прямоугольника ABCD A(1;1); B(4;1); C(4;2); D(1;2).

6. $du = \left(\dfrac{y}{x^2+y^2} - y\right)dx + \left(e^y - x - \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)dy$.

4. Список рекомендуемой литературы

1. *Выгодский М.Я.* Справочник по высшей математике. – М.: Наука, 1972.

2. *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т. Я.*. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учебное пособие. Ч. 2. – М.: Высшая школа, 1997.

3. *Дмитрий Письменный*. Конспект лекций по высшей математике. Ч. 2. – М.: Айрис пресс, 2001.

4. Задачи и упражнения по математическому анализу (для втузов) / Под ред. Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1972.

5. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисления (для втузов). Т. 2. – М.: Наука, 1972.

6. *Шипачев В.С.* Высшая математика. – М.: Высшая школа, 2000.

7. *Герасимович А.И., Рысюк Н.А.* Математический анализ. Т. 2. – Минск, 1989.

СОДЕРЖАНИЕ

Редактор Волкова-Алексеева Н.Е.
Компьютерная вёрстка Саватеевой И.В.

Подписано в печать 29.03.05. Формат $60 \times 84^{1}/_{16}$.
Усл. печ. л. 1,16. Тираж 100. Заказ 81.
Издательство и типография ВГСХА
400002, Волгоград, Университетский пр-т, 26