Тема лекции: Определенный интеграл.

1. Понятие определенного интеграла.

Пусть на отрезке $[a;b]$ задана неотрицательная функция $y = f(x)$. Требуется найти площадь S криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, прямыми $x = a,\ x = b$ и осью абсцисс $y = 0$.

Введем в рассмотрение некоторую ломаную, которая расположена достаточно близко к кривой $y = f(x)$ на $[a;b]$. Фигура под ломаной состоит из трапеций, и ее площадь $S_Л$ (равная сумме площадей этих трапеций) может быть вычислена с использованием известных формул планиметрии. Поскольку ломаная выбрана достаточно близко к кривой $y = f(x)$, то справедливо приближенное равенство $S \approx S_Л$. Это равенство оказывается тем более точным, чем ближе расположена ломаная к исходной кривой. Поэтому за искомую площадь S берем предел площади $S_Л$ под ломаной в предположении неограниченного приближения ломаной к заданной кривой.

Разобьем отрезок $[a;b]$ на n элементарных отрезков точками $x_0, x_1, ..., x_n$: $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$. На каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ разбиения выберем некоторую точку ξ_i и положим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, где $i = 1,2,...,n$. Сумма вида $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ называется *интегральной суммой* для функции $y = f(x)$ на $[a;b]$. Очевидно, что интегральная сумма зависит как от способа разбиения отрезка $[a;b]$ точками $x_0, x_1, ..., x_n$, так и от выбора точек $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ на каждом из отрезков разбиения $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,2,...,n$.

Для избранного разбиения отрезка $[a;b]$ на части обозначим через $\max_i \Delta x_i$ максимальную из длин отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, где $i = 1,2,...,n$.

Пусть предел интегральной суммы $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ при стремлении $\max_i \Delta x_i$ к нулю существует и не зависит от способа выбора точек $x_1, x_2, ..., x_n$ и точек $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$. Тогда этот предел называется *определенным интегралом от*

функции $y = f(x)$ на $[a;b]$, обозначается $\int_a^b f(x)dx$, а сама функция $y = f(x)$ называется *интегрируемой* на отрезке $[a;b]$, т.е. $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max_i \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$. При этом число a называется *нижним пределом*, число b – его *верхним пределом*; функция $f(x)$ – *подынтегральной функцией*; выражение $f(x)dx$ – *подынтегральным выражением*; а задача о нахождении $\int_a^b f(x)dx$ – *интегрированием* функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

<u>Замечание:</u> Определенный и неопределенный интегралы существенно разные понятия: $\int f(x)dx$ – семейство функций, а $\int_a^b f(x)dx$ – определенное число.

Во введенном определении определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ предполагается, что $a < b$. По определению положим $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

Пусть $b = a$. Тогда $\int_a^a f(x)dx = -\int_a^a f(x)dx$. Следовательно, $2\int_a^a f(x)dx = 0$, т.е. $\int_a^a f(x)dx = 0$.

<u>Геометрический смысл определенного интеграла.</u>

Понятие определенного интеграла введено таким образом, что в случае, когда функция $y = f(x)$ неотрицательна на отрезке $[a;b]$, где $a < b$, $\int_a^b f(x)dx$ численно равен площади S под кривой $y = f(x)$ на $[a;b]$.

Учитывая это, например: $\int_0^1 dx = 1$; $\int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$; $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{4}$ и т.д. (геометрически).

Равенство $\int_a^a f(x)dx = 0$ согласовано с геометрическим смыслом определенного интеграла: отрезок интегрирования стянут в точку, т.е. это площадь прямоугольника, одна из сторон которого равна нулю.

Экономический смысл определенного интеграла.

Пусть функция $z = f(t)$ описывает изменение производительности некоторого производства с течением времени. Тогда если $f(t)-$ производительность труда в момент времени t, то $\int_0^T f(t)dt-$ это объем выпускаемой продукции за промежуток $[0;T]$.

Достаточное условие существования определенного интеграла (интегрируемости функции). **Теорема:** Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Пример: Нахождение определенного интеграла по определению. Вычислить $\int_0^1 x^2 dx$.

Решение: Запишем выражение для интегральной суммы, предполагая, что все отрезки $[x_{i-1}, x_i]$ разбиения имеют одинаковую длину Δx_i, равную $\frac{1}{n}$, где $n-$ число отрезков разбиения, причем для каждого из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ разбиения точка ξ_i совпадает с правым концом этого отрезка, т.е. $\xi_i = x_i = \frac{i}{n}$, где $i = 1,2,...,n$. Тогда $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$. Известно, что сумма квадратов чисел натурального ряда равна $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Следовательно,

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3}.$$

2. Свойства определенного интеграла.

1. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т.е. $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$, где $\alpha -$ некоторое число.

2. Интеграл от алгебраической суммы двух функций равен такой же сумме интегралов от этих функций, т.е. $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

3. Если отрезок интегрирования разбит на части, то интеграл на всем отрезке равен сумме интегралов для каждой из полученных частей, т.е. при любых a,b,c:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

4. Если на отрезке $[a;b]$, где $a < b$, $f(x) \le g(x)$, то и $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$, т.е. обе части равенства можно почленно интегрировать.

<u>Следствие:</u> Пусть на отрезке $[a;b]$, где $a < b$, $m \le f(x) \le M$, где m и $M -$ некоторые числа. Тогда $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

5. **Теорема о среднем**. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, где $a < b$, то найдется такое значение $\xi \in [a;b]$, что $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.

Доказательство: По свойству функции, непрерывной на отрезке, для любого $x \in [a;b]$ верно $m \le f(x) \le M$, где m и $M -$ наименьшее и наибольшее значения функции на $[a;b]$. Тогда, из следствия свойства 4 имеем $m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$.

Но функция, непрерывная на отрезке, принимает любое значение, заключенное между ее наименьшим и наибольшим значением. Поэтому, в частности, найдется такое число $\xi \in [a;b]$, что $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(\xi)$. Доказано.

Пусть $f(x) \geq 0$ на $[a;b]$. Тогда теорема о среднем утверждает: найдется такая точка ξ из отрезка $[a;b]$, что площадь под кривой $y = f(x)$ на $[a;b]$ равна площади прямоугольника со сторонами $f(\xi)$ и $(b-a)$.

3. Определенный интеграл как функция верхнего предела.

Если функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, то она интегрируема также на произвольном отрезке $[a;x]$, вложенном в $[a;b]$.

Положим по определению $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(x)dx = \int\limits_a^x f(t)dt$, где $x \in [a;b]$, а функция $\Phi(x)$ называется *интегралом с переменным верхним пределом.*

Свойства функции $\Phi(x)$:

<u>Теорема 1</u>: Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то функция $\Phi(x)$ также непрерывна на $[a;b]$.

Доказательство: Пусть Δx таково, что $x + \Delta x \in [a;b]$. По определению интеграла с переменным верхним пределом и по свойству 3 определенного интеграла получим: $\Phi(x+\Delta x) = \int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int\limits_a^x f(t)dt + \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt = \Phi(x) + \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$

По теореме о среднем найдется такое значение $\xi \in [x; x+\Delta x]$, что $\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(\xi)\Delta x$. Следовательно, $\Phi(x+\Delta x) = \Phi(x) + f(\xi)\Delta x$.

Так как точка $\xi \in [a;b]$, то $m \leq f(\xi) \leq M$, где m и $M -$ наименьшее и наибольшее значения функции на $[a;b]$.

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$ и используя теоремы о пределах, получим $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Phi(x+\Delta x) = \Phi(x) + \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(\xi)\Delta x = \Phi(x)$. Доказано.

<u>Теорема 2</u>: Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$. Тогда в каждой точке x отрезка $[a;b]$ производная функции $\Phi(x)$ по переменному верхнему пределу равна подынтегральной функции $f(x)$, т.е. $\Phi'(x) = \left(\int\limits_a^x f(t)dt\right)' = f(x).$

Доказательство: Из доказательства предыдущей теоремы $\Phi(x+\Delta x)=\Phi(x)+f(\xi)\Delta x$ или $\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}=f(\xi)$, где $\xi\in[x;x+\Delta x]$. Переходя в этом равенстве к пределу, получим: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(\xi)$. Правая часть представляет собой определение производной функции $\Phi(x)$, а в левой части, учитывая непрерывность функции $f(x)$, получим $\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(\xi)=f(x)$.

1. Формула Ньютона-Лейбница.

<u>Теорема:</u> Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $F(x)-$ любая первообразная для $f(x)$ на $[a;b]$. Тогда определенный интеграл от функции $f(x)$ на $[a;b]$ равен приращению первообразной $F(x)$ на этом отрезке, т.е. $\int\limits_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.

Доказательство: Пусть $F(x)-$ некоторая первообразная для функции $f(x)$. Согласно предыдущей теореме функция $\Phi(x)$ также является первообразной для функции $f(x)$. Тогда найдется такое число C, что $F(x)=\Phi(x)+C$.

Получим:

$$F(b)-F(a)=(\Phi(b)+C)-(\Phi(a)+C)=\Phi(b)-\Phi(a)=\int\limits_a^b f(x)dx-\int\limits_a^a f(x)dx=\int\limits_a^b f(x)dx.$$ Док.

При вычислении интегралов будем записывать: $\int\limits_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$.

Примеры: 1) $\int\limits_0^1 x^2dx$; 2) $\int\limits_1^2 2^{3x-4}dx$.

5. Замена переменной и формула интегрирования по частям в определенном интеграле.

<u>Теорема1:</u> Пусть функция $\varphi(t)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[\alpha;\beta]$, $a=\varphi(\alpha);b=\varphi(\beta)$ и функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке x вида $x=\varphi(t)$, где $t\in[\alpha;\beta]$. Тогда справедливо следующее равенство:

$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$. Это формула замены переменной в определенном интеграле.

Пример: $\int_0^1 x(2-x^2)^5 dx$.

<u>Теорема2:</u> Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a;b]$. Тогда $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$, где $uv\Big|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$. Это формула интегрирования по частям для определенного интеграла.

Пример: $\int_1^2 \ln x dx$.

6. Геометрические приложения определенного интеграла.

1. Вычисление площадей плоских фигур.

а) Пусть функция $y = f(x)$ неотрицательна и непрерывна на отрезке $[a;b]$. Тогда по геометрическому смыслу определенного интеграла площадь S под кривой $y = f(x)$ на $[a;b]$ численно равна определенному интегралу $\int_a^b f(x)dx$, т.е. $S = \int_a^b f(x)dx$.

Пример: Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x = \sqrt{y},\ x = 0,\ y = 4$.

б) Пусть функция $y = f(x)$ неположительна и непрерывна на отрезке $[a;b]$. Отражая кривую $y = f(x)$ относительно оси абсцисс, получаем кривую с уравнением $y = -f(x)$. Эта функция уже неотрицательна на $[a;b]$, а площадь под этой кривой на $[a;b]$ из соображений симметрии равна площади S. Тогда $S = \int_a^b (-f(x))dx = -\int_a^b f(x)dx$.

Пример: Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2,\ y = x - 2,\ y = 0$.

в) Пусть на отрезке $[a;b]$ задана непрерывная функция $y = f(x)$ общего вида. Предположим, что исходный отрезок можно разбить точками на конечное число интервалов так, что на каждом из них функция $y = f(x)$ будет знакопостоянна или равна нулю. Тогда $S = S_1 + S_2 + S_3$. Или $S = \int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx$.

г) **<u>Теорема:</u>** Пусть на отрезке $[a;b]$ заданы непрерывные функции $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ такие, что $f_2(x) \geq f_1(x)$. Тогда площадь S фигуры, заключенной между кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ на отрезке $[a;b]$ вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx.$$

Пример: Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 2,\ y = x$.

2. Вычисление объемов тел вращения.

Пусть на отрезке $[a;b]$ задана непрерывная функция $y = f(x)$. Необходимо найти объем V_x тела, образованного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = f(x)$, $y = 0,\ x = a,\ x = b$.

Разобьем отрезок $[a;b]$ на элементарные отрезки точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ и на каждом отрезке разбиения $[x_{i-1}, x_i]$ выберем некоторую точку ξ_i, где $i = 1,2,...,n$. Тогда сумма $\sum_{i=1}^{n} \pi f^2(\xi_i)\Delta x_i$, i-е слагаемое которой – это объем цилиндра с высотой $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ и радиусом основания $f(\xi_i)$. Приближение для искомого объема V_x будет тем лучше, чем меньше длина отрезков объема разбиения Δx_i, поэтому за искомый объем V_x берем предел $V_x = \lim\limits_{\max\limits_i \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi f^2(\xi_i)\Delta x_i$, где $\max\limits_i \Delta x_i$ – максимальная из длин отрезков разбиения. По определению интегральной суммы получим $V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx$.

Пример: Вычислить объем тела, полученного от вращения вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 2x;\ y = 0$.

Формально заменяя в формуле $V_x = \pi\int_a^b f^2(x)dx$ переменную y на x, получим формулу для вычисления объема V_y тела, полученного от вращения криволинейной трапеции вокруг оси ординат: $V_y = \pi\int_c^d f^2(y)dy$.

Пример: Вычислить объем тела, полученного от вращения вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = x^2;\ x = 0;\ y = 1$.

7. Несобственные интегралы.

1) Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования.

Пусть функция $y = f(x)$ определена и интегрируема на произвольном отрезке $[a;t]$, т.е. функция $\Phi(t) = \int_a^t f(x)dx$ определена для произвольного $t \geq a$.

Несобственным интегралом $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ от функции $f(x)$ на полуинтервале $[a;+\infty)$ называется предел функции $\Phi(t)$ при $t \to +\infty$, т.е. $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx$.

Если предел, стоящий в правой части этого равенства, существует и конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся, в противном случае – расходящимся.

Аналогично определяется несобственный интеграл на полупериоде $(-\infty;b]$: $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim\limits_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)dx$. Определение сходимости аналогично предыдущему.

Рассмотрим интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx$. Этот интеграл называется сходящимся, если оба интеграла, входящие в правую часть равенства сходятся. И называется расходящимся, если хотя бы один из интегралов расходится.

Использование несобственных интегралов позволяет придать смысл понятию *площадь полубесконечной (бесконечной) фигуры.*

Примеры: Вычислить а) $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$; б) $\int_{-\infty}^{+\infty}e^s dx$.

В курсе теории вероятностей встречается несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2/2}dx$, называемый *интегралом Эйлера-Пуассона.* Доказано, что $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2/2}dx=\sqrt{2\pi}$.

<u>2) Несобственные интегралы от неограниченных функций.</u>

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна, но не ограничена на полуинтервале $[a;b)$.

Несобственным интегралом $\int_a^b f(x)dx$ от функции $y=f(x)$ на полуинтервале $[a;b)$ называется предел $\lim\limits_{\delta\to 0}\int_a^{b-\delta}f(x)dx$, где $\delta>0$, т.е. $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\delta\to 0}\int_a^{b-\delta}f(x)dx$.

Если предел, стоящий в правой части этого равенства существует и конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся, в противном случае – расходящимся.

Аналогично вводится понятие несобственного интеграла от функции $y=f(x)$ непрерывной, но неограниченной на $(a;b]$: $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\delta\to 0}\int_{a+\delta}^{b}f(x)dx$.

Пример: Вычислить $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

<u>Замечание:</u> Если функция $y=f(x)$ не ограничена при $x=c$, где $c\in(a;b)$, то интеграл $\int_a^b f(x)dx$ также называется несобственным. В этом случае интеграл $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$ считается сходящимся, если сходятся два несобственных интеграла в правой части равенства. В противном случае интеграл будет расходящимся.

Пример: Вычислить $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}$.