1. СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1.1. Криволинейный интеграл первого рода

Если кривая L задана уравнением $y = y(x); a \le x \le b$, то криволинейный интеграл 1-го рода вычисляется по формуле

$$\int_L f(x;y)dl = \int_a^b f(x;y(x))\sqrt{1+(y')^2}\,dx. \qquad (1)$$

Аналогично, если кривая L задана уравнением $x = x(y); c \le y \le d$, то криволинейный интеграл 1-го рода вычисляется по формуле

$$\int_L f(x;y)dl = \int_a^b f(x(y);y)\sqrt{1+(x')^2}\,dy. \qquad (2)$$

Если кривая L задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$; $y = y(t)$; $t_1 \le t \le t_2$, то криволинейный интеграл 1-го рода равен:

$$\int_L f(x;y)dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t);y(t))\sqrt{\left(x_t'\right)^2 + \left(y_t'\right)^2}\,dt. \qquad (3)$$

Аналогично для пространственной кривой L, заданной уравнениями $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$; $t_1 \le t \le t_2$, криволинейный интеграл 1-го рода от функции трех переменных вычисляется по формуле:

$$\int_L f(x;y;z)dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t);y(t);z(t))\sqrt{\left(x_t'\right)^2 + \left(y_t'\right)^2 + \left(z_t'\right)^2}\,dt. \qquad (4)$$

Если кривая L задана в полярной системе координат уравнением $r = r(\varphi); \alpha \le \varphi \le \beta$, то криволинейный интеграл 1-го рода равен:

$$\int_L f(x;y)dl = \int_\alpha^\beta f(r(\varphi)\cos\varphi; r(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}d\varphi. \qquad (5)$$

Если кривая L имеет линейную плотность $\rho = \rho(x;y) > 0$, то криволинейный интеграл 1-го рода $\int_L \rho(x;y)dl$ представляет собой массу этой кривой, т.е.

$$M = \int_L \rho(x;y)dl \qquad (6)$$

(*физический смысл криволинейного интеграла 1-го рода*).

Свойства криволинейного интеграла 1-го рода

1. Криволинейный интеграл 1-го рода не зависит от направления обхода контура L, т.е. $\int_{L_-} f(x;y)dl = \int_{L_-} f(x;y)dl$.

2. $\int\limits_L [f_1(x;y) \pm f_2(x;y)]dl = \int\limits_L f_1(x;y)dl \pm \int\limits_L f_2(x;y)dl$.

3. $\int\limits_L cf(x;y)dl = c\int\limits_L f(x;y)dl; c = const$.

4. Если контур интегрирования L состоит из двух частей L_1 и L_2, то $\int\limits_L f(x;y)dl = \int\limits_{L_1} f(x;y)dl + \int\limits_{L_2} f(x;y)dl$.

Задача 1: Вычислить криволинейный интеграл 1-го рода вдоль кривой L

$\int\limits_L \frac{y+3}{x}dl$ L: $y = 2x^2 - 3$ от A(1;-1) до B(2; 5).

Решение: Так как кривая L задана уравнением $y = 2x^2 - 3; 1 \le x \le 2$ и $y' = \left(2x^2 - 3\right)' = 4x$, то по формуле (1) получаем:

$$\int\limits_L \frac{y+3}{x}dl = \int\limits_1^2 \frac{2x^2 - 3 + 3}{x}\sqrt{1 + (4x)^2}dx = \int\limits_1^2 2x\sqrt{1 + 16x^2}dx = \frac{1}{16}\int\limits_1^2 \left(1 + 16x^2\right)^{1/2} d\left(1 + 16x^2\right) =$$

$$= \frac{1}{16}\left.\frac{\left(1 + 16x^2\right)^{3/2}}{3/2}\right|_1^2 = \frac{1}{24}\left(65\sqrt{65} - 17\sqrt{17}\right).$$

Задача 2: Найти массу дуги окружности $x^2 + y^2 = 2y; x \ge 0; y \ge 0$, если линейная плотность $\rho(x;y) = x$.

Решение: Так как кривая L представляет собой окружность, то ее уравнение удобно записать в полярной системе координат. По правилу перехода от декартовой системы координат к полярной $x = r\cos\varphi; y = r\sin\varphi$. Тогда уравнение окружности имеет вид $r = 2\sin\varphi$. По условию $x \ge 0; y \ge 0$, следовательно, угол φ изменяется в пределах $0 \le \varphi \le \pi/2$.

Таким образом, искомая масса $M = \int\limits_L \rho(x;y)dl = \int\limits_L xdl$, где L: $r = 2\sin\varphi; 0 \le \varphi \le \pi/2$.

По формуле (5) получаем

$$M = \int\limits_0^{\pi/2} 2\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{(2\sin\varphi)^2 + (2\sin\varphi)'^2}d\varphi = \int\limits_0^{\pi/2} \sin(2\varphi)\sqrt{4\sin^2\varphi + 4\cos^2\varphi}d\varphi =$$

$$= 2\int\limits_0^{\pi/2} \sin(2\varphi)d\varphi = -\cos(2\varphi)\Big|_0^{\pi/2} = -\cos\pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2.$$

Примеры решения задач:

4.1.1. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_L \frac{x}{y}\,dl,$$

где L — дуга параболы $y^2 = 2x$, заключенная между точками $(2,2)$ и $(8,4)$.

❍ Найдем дифференциал дуги dl для кривой $y = \sqrt{2x}$. Имеем

$$y' = \frac{1}{\sqrt{2x}}, \quad dl = \sqrt{1 + (y')^2}\,dx = \sqrt{1 + \frac{1}{2x}}\,dx.$$

Следовательно, данный интеграл равен

$$\int\limits_L \frac{x}{y}\,dl = \int\limits_2^8 \frac{x}{\sqrt{2x}}\sqrt{1 + \frac{1}{2x}}\,dx = \int \frac{x\sqrt{1+2x}}{2x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_2^8 \sqrt{1+2x}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}(1+2x)^{3/2}\Big|_2^8 = \frac{1}{6}(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}). \quad \bullet$$

4.1.4. Вычислить криволинейный интеграл первого рода от функции с тремя переменными

$$\int\limits_L (5z - 2\sqrt{x^2+y^2})\,dl,$$

где L — дуга кривой, заданной параметрически $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$.

❍ Перейдем в подынтегральном выражении к переменной t. Имеем для подынтегральной функции:

$$5z - 2\sqrt{x^2+y^2} = 5t - 2\sqrt{t^2(\cos^2 t + \sin^2 t)} = 3t.$$

Теперь выразим через t дифференциал dl:

$$dl = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\,dt = \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1}\,dt =$$

$$= \sqrt{(\cos^2 - 2t\sin t\cos t + t^2\sin^2 t) + (\sin^2 t + 2t\sin t\cos t + t^2\cos^2 t) + 1}\,dt =$$

$$= \sqrt{(\cos^2 t + \sin^2 t) + t^2(\sin^2 t + \cos^2 t) + 1} = \sqrt{2+t^2}\,dt.$$

Таким образом,

$$\int\limits_L (5z - 2\sqrt{x^2+y^2})\,dl = \int\limits_0^\pi 3t\sqrt{2+t^2}\,dt = \int\limits_0^\pi \frac{3}{2}\sqrt{2+t^2}\,d(2+t^2) =$$

$$= (2+t^2)^{3/2}\Big|_0^\pi = \sqrt{(2+\pi^2)^3} - 2\sqrt{2}. \quad \bullet$$

1.2. Криволинейный интеграл второго рода

Если кривая L задана уравнением $y = y(x); a \le x \le b$, то криволинейный интеграл 2-го рода вычисляется по формуле

$$\int_L P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \int_a^b [P(x;y(x)) + Q(x;y(x))y'(x)]dx. \quad (7)$$

Если уравнение кривой L имеет вид $x = x(y); c \le y \le d$, то криволинейный интеграл 2-го рода равен:

$$\int_L P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \int_c^d [P(x(y);y))x'(y) + Q(x(y);y)]dy. \quad (8)$$

В случае параметрического задания кривой L уравнениями $x = x(t)$; $y = y(t)$; $t_1 \le t \le t_2$ формула для вычисления криволинейного интеграла 2-го рода имеет вид:

$$\int_L P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \int_{t_1}^{t_2} [P(x(t);y(t))x'(t) + Q(x(t);y(t))y'(t)]dt. \quad (9)$$

Криволинейный интеграл 2-го рода по пространственной кривой L, заданной уравнениями $x = x(t); y = y(t); z = z(t); t_1 \le t \le t_2$ вычисляется по формуле:

$$\int_L P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)dz =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} [P(x(t);y(t);z(t))x'(t) + Q(x(t);y(t);z(t))y'(t) + R(x(t);y(t);z(t))z'(t)]dt. \quad (10)$$

Криволинейный интеграл 2-го рода представляет собой работу, которую совершает сила $\bar{F} = P(x;y)\bar{i} + Q(x;y)\bar{j}$ при перемещении материальной точки по кривой L, т.е. работа равна

$$A = \int_L P(x;y)dx + Q(x;y)dy \quad (11)$$

(*физический смысл криволинейного интеграла 2-го рода*).

Свойства криволинейного интеграла 2-го рода

1. При изменении направления обхода кривой L криволинейный интеграл 2-го рода меняет знак на противоположный, т.е.

$$\int_{L} P(x,y)dx + Q(x;y)dy = -\int_{L} P(x,y)dx + Q(x;y)dy.$$

2. Если кривая L состоит из двух частей L_1 и L_2, то

$$\int_L P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \int_{L_1} P(x;y)dx + Q(x;y)dy + \int_{L_2} P(x;y)dx + Q(x;y)dy.$$

Если выполняется равенство $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то подынтегральное выражение $P(x;y)dx + Q(x;y)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $u = u(x;y)$, т.е. $du = P(x;y)dx + Q(x;y)dy$. Тогда функцию $u(x;y)$ по заданному полному дифференциалу $du = P(x;y)dx + Q(x;y)dy$ можно найти по формуле

$$u(x;y) = \int_{x_0}^{x} P(x;y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x;y)dy + C,\ \mathrm{C = const.} \qquad (12)$$

Замечание: за начальную точку $M_0(x_0;y_0)$ принимают любую точку, в которой определены функции $P(x;y);Q(x;y)$.

Теорема: Если функции $P(x;y);Q(x;y)$ непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y};\frac{\partial Q}{\partial x}$ в замкнутой области D, ограниченной контуром L, то справедлива ***формула Грина***:

$$\oint_L P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy, \qquad (13)$$

причем интегрирование по контуру L производится в положительном направлении обхода кривой.

216. Вычислить значение криволинейного интеграла $\int_L (x+y^2)\,dx+2xy\,dy$ **между** точками $A(0,\ 0)$ и $B(2,\ 4)$ контура L, если **контуром L служит** парабола $y=x^2$.

Решение. **Применяя** формулу (2), будем иметь

$$\int_L (x+y^2)\,dx+2xy\,dy = \int_L (x+x^4)\,dx+2x\cdot x^2\cdot 2x\,dx =$$

$$= \int_0^2 (x+5x^4)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}+x^5\right]_0^2 = 34.$$

✓224. Вычислить интеграл $\int\limits_L x^2dx+(x+z)\,dy+xy\,dz$, где L — дуга кривой $x=\sin t$, $y=\sin^2 t$, $z=\sin^3 t$ $(0\leqslant t\leqslant \frac{\pi}{2})$.

Решение. Выразим подинтегральное выражение через параметр t.

$$\int\limits_L x^2dx+(x+z)\,dy+xy\,dz=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos t\,dt+(\sin t+\sin^3 t)\cdot 2\sin t\cos t\,dt+$$

$$+\sin t\sin^2 t\, 3\sin^2 t\cos t\,dt=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(3\sin^2 t+2\sin^4 t+3\sin^5 t)\cos t\,dt=$$

$$=\left[\sin^3 t+\frac{2\sin^5 t}{5}+\frac{\sin^6 t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{19}{10}.$$

✓227. Применяя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл

$$K=\oint\limits_L 2(x^2+y^2)\,dx+(x+y)^2dy,$$

где L есть контур треугольника ABC с вершинами $A(1,\ 1)$, $B(2,\ 2)$, $C(1,\ 3)$ (рис. 42).

Решение. По условию $P(x,\ y)=2(x^2+y^2)$; $Q(x,\ y)=(x+y)^2$; тогда $\frac{\partial Q}{\partial x}=2(x+y)$; $\frac{\partial P}{\partial y}=4y$; используя формулу (1), имеем

$$K=\iint\limits_D[2(x+y)-4y]\,dx\,dy=2\iint\limits_D(x-y)\,dx\,dy.$$

Так как уравнение прямой AB $y=x$, а уравнение прямой BC — $y=-x+4$, то область D (треугольник ABC) определяется неравенствами: $1\leqslant x\leqslant 2$, $x\leqslant y\leqslant -x+4$. Следовательно,

$$K=2\int_1^2 dx\int_x^{-x+4}(x-y)\,dy=-\int_1^2 dx\left[(x-y)^2\right]_x^{-x+4}=$$

$$=-\int_1^2 (x+x-4)^2dx=-4\int_1^2 (x-2)^2dx=-\frac{4}{3}\left[(x-2)^3\right]_1^2=-\frac{4}{3}.$$

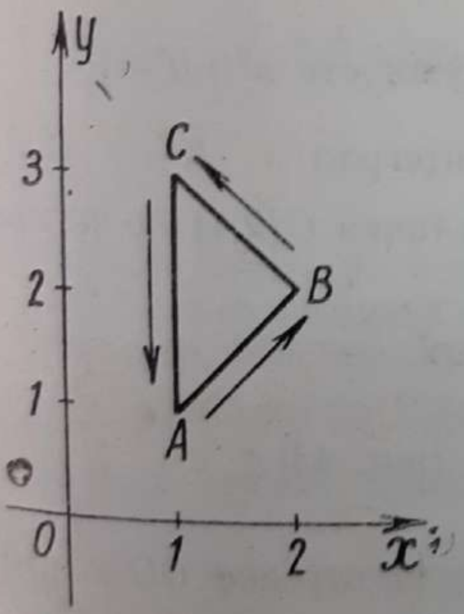

Рис. 42.