Дифференциальные уравнения первого порядка.

1. Основные понятия.

При решении различных задач математики, физики, химии, экономики, биологии и других наук часто пользуются математическими моделями в виде уравнений, связывающих независимую переменную, искомую функцию и ее производные. Такие уравнения называются *дифференциальными*. *Решением* дифференциального уравнения называется функция, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Так, решением уравнения $y' = f(x)$ является функция $y = F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$.

Если искомая функция зависит от одной переменной, то ДУ называют *обыкновенным*; в противном случае – ДУ в *частных производных*. Далее мы рассматриваем только обыкновенные ДУ.

Наивысший порядок производной, входящей в ДУ, называется *порядком* этого уравнения.

Например, уравнение $y''' - 3y'' + 2y = 0$ – обыкновенное ДУ третьего порядка, а уравнение $x^2 y' + 5xy = y^2$ – первого порядка.

Процесс отыскания решения ДУ называется его *интегрированием,* а график решения ДУ – *интегральной кривой*.

Пример: Из статистических данных известно, что для рассматриваемого региона число новорожденных и число умерших за единицу времени пропорциональны численности населения с коэффициентами пропорциональности k_1 и k_2 соответственно. Найти закон изменения численности населения с течением времени. (Описать протекание демографического процесса).

Решение: Пусть $y = y(t)$– число жителей региона в момент времени t. Прирост населения Δy за время Δt равен разности между числом родившихся и умерших за это время, т.е. $\Delta y = k_1 y\Delta t - k_2 y\Delta t$ или $\frac{\Delta y}{\Delta t} = ky$, где

$k = k_1 - k_2$. Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$ получаем уравнение $y' = ky$. Решением этого уравнения является функция $y = Ce^{kt}$, где C – постоянная, определяемая начальными условиями (численность населения в начальный момент времени).

ДУ первого порядка в общем случае можно записать в виде $F(x; y; y') = 0$. Уравнение связывает независимую переменную x, искомую функцию y и ее производную y'. Если это уравнение можно разрешить относительно y', то его записывают в виде $y' = f(x; y)$ и называют *ДУ первого порядка, разрешенным относительно производной*.

Уравнение $y' = f(x; y)$ устанавливает связь между координатами точки $(x; y)$ и угловым коэффициентом y' касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку. Следовательно, ДУ $y' = f(x; y)$ дает совокупность направлений (*поле направлений*) на плоскости Oxy. Это геометрический смысл ДУ первого порядка.

Кривая, во всех точках которой направление поля одинаково, называется *изоклиной*. Изоклинами можно пользоваться для приближенного построения интегральных кривых. Уравнение изоклины можно получить, если положить $y' = c$, т.е. $f(x; y) = c$.

Пример: С помощью изоклин начертить вид интегральных кривых уравнения $y' = 2x$.

Решение: Уравнение изоклин этого ДУ будет $2x = c$, т.е. изоклинами здесь будут прямые, параллельные оси $Oy\left(x = \frac{c}{2}\right)$. В точках прямых проведем отрезки, образующие с осью Ox один и тот же угол α, тангенс которого равен c.

Так, при $c = 0$ получим $x = 0, tg\alpha = 0, \alpha = 0$;

при $c = 1$ получим $x = \frac{1}{2}, tg\alpha = 1, \alpha = 45°$;

при $c=-1$ получим $x=-\frac{1}{2}, tg\alpha=-1, \alpha=-45°$;

при $c=2$ получим $x=1, tg\alpha=2, \alpha=arctg2\approx 63°$ и т.д.

Построив четыре изоклины и отметив на каждой из них ряд стрелочек, наклоненных к оси Ox под определенным углом, по их направлениям строим линии. Они представляют собой семейство парабол.

ДУ первого порядка, разрешенное относительно производной, можно записать в *дифференциальной форме*: $P(x;y)dx+Q(x;y)dy=0$, где $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ – известные функции.

Интегрирование ДУ в общем случае приводит к бесконечному множеству решений, отличающихся друг от друга постоянными величинами. Например, решением уравнения $y'=2x$ является функция $y=x^2$, а также $y=x^2+1$, $y=x^2-\sqrt{2}$ и $y=x^2+c$, где $c=const$.

Чтобы решение ДУ приобрело конкретный смысл, его надо подчинить некоторым дополнительным условиям.

Условие, что при $x=x_0$ функция y должна быть равна заданному числу y_0, т.е. $y=y_0$ называется *начальным условием*. Начальное условие записывается в виде $y(x_0)=y_0$.

Общим решением ДУ первого порядка называется функция $y=\varphi(x;c)$, содержащая одну произвольную постоянную и удовлетворяющая условиям:

1) Функция $\varphi(x;c)$ является решением ДУ при каждом фиксированном значении c.

2) Каково бы ни было начальное условие, можно найти такое значение постоянной $c=c_0$, что функция $y=\varphi(x;c_0)$ удовлетворяет данному начальному условию.

Частным решением ДУ первого порядка называется любая функция $y=\varphi(x;c_0)$, полученная из общего решения $y=\varphi(x;c)$ при конкретном значении постоянной $c=c_0$.

С геометрической точки зрения $y=\varphi(x;c)$ есть семейство интегральных кривых на плоскости Oxy; частное решение $y=\varphi(x;c_0)$ – одна кривая из этого семейства, проходящая через точку $(x_0;y_0)$.

Задача отыскания решения ДУ первого порядка, удовлетворяющая заданному начальному условию, называется *задачей Коши*.

Теорема: (существования и единственности решения задачи Коши). Если в уравнении $y'=f(x;y)$ функция $f(x;y)$ и ее частная производная $f'_y(x;y)$ непрерывны в некоторой области D, содержащей точку $(x_0;y_0)$, то существует единственное решение $y=\varphi(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0)=y_0$.

2. ДУ первого порядка с разделяющимися переменными.

Наиболее простым ДУ первого порядка называется уравнение вида $P(x)\cdot dx+Q(y)\cdot dy=0$. В нем одно слагаемое зависит только от x, а другое – от y. Такие уравнения называют уравнениями с *разделенными переменными.* Проинтегрировав почленно это уравнение, получим: $\int P(x)\cdot dx+\int Q(y)\cdot dy=c$ – его общее решение.

Пример: Найти общее решение уравнения: $x\cdot dx-y\cdot dy=0$.

Более общий случай описывают уравнения *с разделяющимися переменными*, которые имеют вид $P_1(x)\cdot Q_1(y)\cdot dx+P_2(x)\cdot Q_2(y)\cdot dy=0$. Путем почленного деления этого уравнения на $Q_1(y)\cdot P_2(x)\neq 0$, получим: $\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx+\frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy=0$, $\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx+\int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy=c$ – его общее решение.

<u>Замечание:</u> При делении ДУ на $Q_1(y)\cdot P_2(x)$ могут быть потеряны некоторые решения. Поэтому нужно отдельно решить уравнение $Q_1(y)\cdot P_2(x)=0$ и установить те решения ДУ, которые не могут быть получены из общего решения, – *особые решения.*

Примеры: 1) $(y+xy)dx+(x-xy)dy=0$;2) $y'=-\frac{y}{x}$, удовлетв. усл. $y(4)=1$.

3. Однородные ДУ первого порядка.

К уравнению с разделяющимися переменными приводятся однородные ДУ первого порядка.

Функция $f(x;y)$ называется *однородной функцией n-го порядка,* если при умножении каждого ее аргумента на произвольный множитель λ вся функция умножится на λ^n, т.е. $f(\lambda x;\lambda y)=\lambda^n f(x;y)$.

Например, функция $f(x;y)=x^2-2xy$ есть однородная функция второго порядка, так как $f(\lambda x;\lambda y)=(\lambda x)^2-2\lambda x\lambda y=\lambda^2\left(x^2-2xy\right)=\lambda^2 f(x;y)$.

ДУ $y'=f(x;y)$ называется *однородным*, если функция $f(x;y)$ есть однородная функция нулевого порядка. Тогда это уравнение можно записать в виде $y'=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$, которое преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными с помощью подстановки $\dfrac{y}{x}=u$ или $y=ux$.

Пример: Решить уравнение $y'=\dfrac{y^2-x^2}{2xy}$.

4. Линейные ДУ первого порядка.

ДУ первого порядка называется *линейным*, если оно имеет вид $y'+f(x)y=g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ – некоторые непрерывные функции переменной x. Когда функция $g(x)=0$, уравнение называется *однородным*, в противном случае – *неоднородным*.

Рассмотрим один из возможных способов решения линейного уравнения: будем искать решение в виде $y=u(x)v(x)$, тем самым искомыми становятся функции $u(x)$ и $v(x)$, одна из которых может быть выбрана произвольно, а другая – должна определяться из исходного уравнения.

Так как $y = uv$, то $y' = u'v + uv'$. Подставляя в исходное уравнение, получим $u'v + uv' + f(x)uv = g(x)$. Сгруппируем второе и третье слагаемые и вынесем за скобки общий множитель: $u'v + u(v' + f(x)v) = g(x)$.

Найдем сначала какое-либо решение $v = v(x)$ уравнения $v' + f(x)v = 0$. Тогда функция $u = u(x)$ – решение уравнения $u'v = g(x)$.

Тем самым решение исходного уравнения сводится к решению двух уравнений с разделяющимися переменными.

Пример: Решить уравнение $xy' - 2y = 2x^4$.