Министерство сельского хозяйства РФ

Департамент научно-технологической политики и образования

ФГБОУ ВО «Волгоградский государственный аграрный университет»

Кафедра высшей математики

СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ПОЛЯ

Теория поля – крупный раздел физики и математики, в котором изучаются скалярные, векторные, тензорные поля.

К рассмотрению скалярных и векторных полей приводят многие задачи физики, электротехники, механики, гидравлики и других технических дисциплин. При решении этих задач рассматривают величины, значения которых определятся положением выбранной точки и моментом времени. Если эта величина принимает числовые значения, то, с математической точки зрения, задана скалярная функция точки и времени. Если значения этой величины векторные, то считают, что задана векторная функция.

Полем называется область V пространства, в каждой точке которой определено значение некоторой величины. Если эта величина скалярная, то поле называется ***скалярным***. Если величина векторная, то поле называется ***векторным***. Скалярные и векторные поля – математические модели конкретных процессов и явлений.

Примерами скалярных полей являются поля температур (воздуха, тела и т.д.), атмосферного давления, плотности (массы, воздуха и т.д.), электрического потенциала и т.д. Примерами векторных полей являются поле силы тяжести, поле скоростей частиц текущей жидкости, магнитное поле, поле плотности электрического тока и т.д.

Если величина, характеризующая поле, не зависит от времени, а зависит только от положения точки, то поле называется ***стационарным***. Мы будем рассматривать только стационарные поля.

История возникновения теории поля

Возникновение векторного исчисления или теории поля связано с потребностями механики и физики. В начале 19 века происходит новое значительное расширение области приложений математического анализа. Если до этого времени основными разделами физики, требовавшими большого математического аппарата, оставались механика и оптика, то теперь к ним присоединяются электродинамика, теория магнетизма и термодинамика. Получают широкое развитие важнейшие разделы механики и непрерывных сред, из которых только гидродинамика несжимаемой идеальной жидкости была создана ещё в 18 веке Д. Бернулли, Л. Эйлером, Ж. Д'Аламбером и Ж. Лагранжем. Быстро растут математические запросы техники и баллистики. В начале 19 века в качестве основного аппарата новых областей механики и математической физики усиленно разрабатывается теория дифференциальных уравнений с частными производными и особенно теория потенциала. В этом направлении работает большинство крупных аналитиков начала и середины 19 века – К. Гаусс, Ж. Фурье, С. Пуассон, О. Коши, П. Дирихле, Дж. Грин, М.В. Остроградский. Последний заложил основы вариационного исчисления для функций нескольких переменных, нашел знаменитую формулу преобразования тройных интегралов в двойные и её n – мерное обобщение. Он также усовершенствовал теорию замены переменных в кратных интегралах, получив по существу те результаты, которые были для общего n – мерного случая позднее компактно сформулированы К. Якоби.

В результате исследования по уравнениям математической физики в работах Дж. Стокса и других возникает векторный анализ, одной из основных формул которого является формула Остроградского. Векторный анализ – это раздел векторного исчисления, в котором изучается средствами математического анализа векторные и скалярные функции одного или нескольких аргументов (векторные поля и скалярные поля). Для характеристики данных полей вводится целый ряд понятий, часть которых приведены в данной работе: линии уровня и векторные линии, векторные трубки, градиент скалярного поля, циркуляция, дивергенция и вихрь векторного поля.

Приложение векторного анализа широко используется в прикладной физике: уравнение непрерывности и уравнение движения идеальной жидкости (гидродинамика), уравнение распространения звука (теория волн), уравнение теплопроводности (термодинамика), уравнения Максвелла или телеграфное уравнение (электродинамика).

СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ

Определение: Стационарным скалярным полем называется область V пространства, в каждой точке M(x;y;z) которой определена скалярная функция u = u(M) = u(x;y;z).

Функция u(M) независимо от ее физического смысла называют потенциалом скалярного поля.

Основными характеристиками скалярного поля являются поверхности (или линии) уровня, производная по направлению и градиент.

Поверхности и линии уровня скалярного поля.

Определение: Поверхностью уровня скалярного поля называется множество точек этого поля, в которых функция u(M) принимает постоянное значение, т.е. u(x;y;z) = C (C = const).

Придавая константе C различные значения, получаем различные поверхности уровня, которые в совокупности как бы расслаивают поле. Через каждую точку поля проходит только одна поверхность уровня. Семейство поверхностей равного уровня даёт наглядное представление о ***скорости изменения поля***: на участках поля, где поверхности располагаются близко друг от друга, скорость изменения поля будет больше, чем там, где эти поверхности располагаются дальше друг от друга.

Если задано плоское скалярное поле u = u (x; y), то равенство

u (x;y) = C, определяет не поверхности, а линии уровня. Известные из физики изотермы (линии равной температуры), изобары (линии равного давления), эквипотенциальные линии (линии равного потенциала) являются примером линий уровня в различных плоских физических скалярных полях. Если потенциал скалярного поля задает уровень точек земной поверхности по отношению к уровню моря, то линии уровня – это горизонтали топографической карты. Они соединяют точки с одинаковыми высотами земной поверхности и наглядно описывают рельеф местности. В метеорологии, например, линиями уровня являются сети изобар и изотерм (линии одинаковых средних давлений и одинаковых средних температур).

Пример 1: Найти поверхности уровня скалярного поля

$$u(x;y;z) = x^2 + y^2 .$$

***Решение*:** Поверхности уровня определяем из равенства $x^2 + y^2 = C$.

Данное равенство задает множество цилиндров, образующие которых параллельны оси oz. Из записанного равенства следует, что константа C принимает только неотрицательные значения.

При C = 0 получаем x=y=0, т.е. это ось oz.

Построим поверхности уровня при C = 1 и C = 4.

При С = 1получаем уравнение $x^2+y^2=1$- это цилиндр в основание которого лежит окружность с центром в начале координат единичного радиуса.

При С = 4 уравнение принимает вид $x^2+y^2=4$- в основании цилиндра окружность радиуса R = 2.

Изобразим поверхности уровня графически (рис. 1.1).

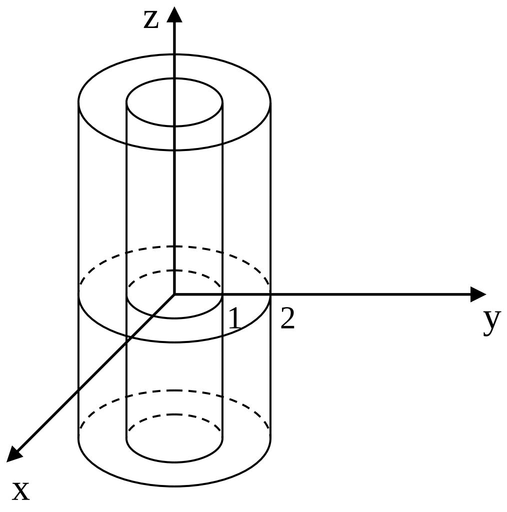


рис. 1.1

Таким образом, поверхностями уровня данного скалярного поля является совокупность цилиндров, образующие которых параллельны оси oz, стягивающихся к оси oz при С стремящемся к нулю.

Пример 2: Построить линии уровня скалярного поля $u(x;y)=x^2-2y$ при С = 0; С = 2; С = -2.

Решение: При С = 0 получаем уравнение линии уровня $x^2-2y=0 \Rightarrow$ $y=\dfrac{x^2}{2}$- это уравнение параболы, симметричной относительно оси оу, с вершиной в начале координат.

При С = 2 получаем, что $x^2-2y=2 \Rightarrow y=\dfrac{x^2}{2}-1$- парабола, смещенная по оси оу на 1 единицу вниз.

При С = -2 получаем $y=\dfrac{x^2}{2}+1$- парабола, смещенная по оси оу на 1 единицу вверх.

Построим график полученных линий уровня (рис.1.2).

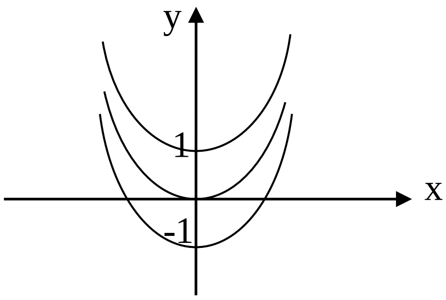


рис. 1.2

Упражнения для самостоятельного решения:

В следующих задачах найти уравнения и построить линии уровня скалярного поля:

1. $u = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$
2. $u = \sin(x^2 - y^2)$
3. $u = xy$

Найти уравнения и построить поверхности уровня скалярного поля:

4. $u = \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{y^2 + z^2}}$
5. $u = \dfrac{x^2 + y^2}{z}$
6. $u = \dfrac{1}{2x + 3y - 4z + 1}$
7. $u = arctg \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$
8. $u = \arccos\left(\dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$
9. $u = \ln\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$
10. $u = \dfrac{z}{x^2 + y^2}$

Построить линии уровня скалярного поля при заданных значениях скалярной функции U(x;y;z)

11. $u = arcsin \dfrac{x}{x \ + y}$

Построить линии уровня для u= 0, u= $\dfrac{\pi}{6}$

12. $u = \sqrt{4 + x^2 + y^2}$

Построить линии уровня для u=3,u=4.

13. $u = y^2 - 4x$.

Построить линии уровня для u=0, u=4, u=8.

Производная по направлению

Рассмотрим скалярное поле, определяемое скалярной функцией u(M). Возьмем в поле точку M_0 и выберем некоторое направление, определяемое единичным вектором $\bar{\tau}^0$. Через точку M_0 проведем прямую l параллельно вектору $\bar{\tau}^0$ и возьмем на этой прямой произвольную точку M. Обозначим через Δu разность: $\Delta u = u(M) - u(M_0)$, т.е. приращение потенциала, а через Δl - длину $|M_0M|$. Тогда отношение $\frac{\Delta u}{\Delta l}$ определяет среднюю скорость изменения потенциала u(M) в направлении вектора $\bar{\tau}^0$ или прямой l.

Определение: Производной функции u = u(M) в точке M_0 по направлению l называется предел $\lim\limits_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta l} = \frac{\partial u}{\partial l}$.

Производная по направлению характеризует скорость изменения потенциала скалярного поля в точке M_0 в заданном направлении. Причем, если $\frac{\partial u}{\partial l}>0$, то в данном направлении потенциал скалярного поля возрастает, если $\frac{\partial u}{\partial l}<0$, то потенциал убывает, если $\frac{\partial u}{\partial l}=0$, то потенциал сохраняет постоянное значение.

Определение производной по направлению носит инвариантный характер, т.е. не зависит от выбора системы координат.

Пусть в пространстве задана декартова система координат и функция u(M) = u(x;y;z) дифференцируема в точке $M_0(x_0;y_0;z_0)$. Тогда производную по направлению находят по формуле:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} \cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} \cos\gamma, \qquad (1.1)$$

где $\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma$ - направляющие косинусы вектора $\overline{M_0M} \| \overline{\tau_0}$.

Если задано плоское скалярное поле, то производную по направлению можно найти по формуле:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} cos\beta \qquad (1.2)$$

Или по формуле:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} \sin\alpha \qquad (1.3)$$

Замечание: Формула (1) для вычисления производной по направлению справедлива и в том случае, когда точка M_0 стремится к точке M по кривой, касательная к которой совпадает с прямой l.

Пример1: Найти производную поля $u(M) = x^2 - y^2$ в точке $A(\sqrt{3}, -4)$ по направлению $\bar{l} = \sqrt{3}\bar{\imath} - \bar{\jmath}$

Решение. Вычислим направляющие косинусы вектора $\bar{l}$:

$$|\bar{l}| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2.$$

Следовательно, $cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $cos\beta = -\frac{1}{2}$.

Найдём частные производные функции $u(M)$ в указанной точке А:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(A) = 2x|_A = 2\sqrt{3}\,; \quad \frac{\partial u}{\partial y}(A) = -2y|_A = 8$$

По формуле (1.2) вычислим производную по направлению:

$$\frac{\partial u}{\partial l}(A) = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 8 \cdot \frac{1}{2} = -1$$

Здесь отрицательный знак производной поля указывает на то, что в данной точке в направлении данного вектора поле убывает.

Пример 2: Найти производную функции $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ в точке $M_1(-2;3;6)$ по направлению к точке $M_2(-1;1;4)$.

Решение:

Найдем частные производные функции u:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,.$$

Тогда значения частных производных в точке M_1 равны:

$$\frac{\partial u(M_1)}{\partial x} = \frac{-2}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 6^2}} = -\frac{2}{7}\,;$$

$$\frac{\partial u(M_1)}{\partial y} = \frac{3}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 6^2}} = \frac{3}{7}\,;$$

$$\frac{\partial u(M_1)}{\partial z} = \frac{6}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 6^2}} = \frac{6}{7}\,.$$

Найдем координаты вектора $\overrightarrow{M_1M_2}=(-1+2;1-3;4-6)=(1;-2;-2)$.

Его длина равна $\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|=\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}=3$.

Тогда единичный вектор имеет координаты:

Следовательно, $\cos\alpha=\dfrac{1}{3}; \cos\beta=-\dfrac{2}{3}; \cos\gamma=-\dfrac{2}{3}$.

По формуле (1.3) получаем:

$$\frac{\partial u(M_1)}{\partial l}=-\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{3}+\frac{3}{7}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+\frac{6}{7}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{2}{21}-\frac{6}{21}-\frac{12}{21}=-\frac{20}{21}.$$

Так как производная по напралению отрицательна, то в данном направлении скалярное поле убывает

Пример3: Вычислить производную функции $z=arctg(xy)$ в точке $M_0(1;1)$, принадлежащей параболе $y=x^2$, по направлению касательной к этой кривой (в направлении возрастания абсциссы).

Решение: За направление l параболы $y=x^2$ в точке $M_0(1;1)$ берем направление касательной к параболе в этой точке. Это направление определяется углом α, который касательная составляет с осью Ox. Известно, что тангенс угла наклона касательной в некоторой точке равен значению производной функции в заданной точке.

Так как $y'=2x, \Rightarrow tg\alpha=y'(1)=2\cdot1=2$.

По тригонометрическим формулам школьного курса алгебры находим:

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+2^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5};$$

$$\sin\alpha=\frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}=\frac{2}{\sqrt{1+2^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Найдем частные производные функции z в точке M_0:

$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial x}=\left.\frac{y}{1+(xy)^2}\right|_{M_0}=\frac{1}{1+(1\cdot1)^2}=\frac{1}{2};$$

$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial y}=\left.\frac{x}{1+(xy)^2}\right|_{M_0}=\frac{1}{1+(1\cdot1)^2}=\frac{1}{2}.$$

По формуле $\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial l}=\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial x}\cos\alpha+\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial y}\cos\beta$ получим:

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{3\sqrt{5}}{10}.$$

Упражнения для самостоятельного решения

Найти производную заданного скалярного поля по заданному направлению:

1. $u = 8x^2y^3 + x^2z^3$ в точке M_0 (1, 0, -1) по направлению к точке M(2,-4,3);
2. $u = x^2y + 2xz^2$ в точке M_0 (1, 1, -1) по направлению к точке M(2,-1,3);
3. $u = 2\sqrt{x+y} + y\,arctg\,z$ в точке $M(3,-2,1)$ по направлению вектора $I = 4i-3k$;
4. $u = 2\sqrt{x+y} + y\,arctg\,z$ в точке $M(3,-2,1)$ по направлению вектора $I = 4i-3k;$
5. $u = x^2y^2z - ln(z-1)$ в точке $M(1,1,2)$ по направлению к точке К(-3,1, -2).
6. $u = x^2 + y^2 - \sqrt{x^2+z^2}$ в точке $M(-3;0;4)$ в направлении нормали к поверхности $2x^2 + 12x + 5y^2 + z^2 - 3z - 58 = 0$, образующей острый угол с осью Oz
7. $u = \ln(3 - x^2) + xy^2z$ в точке $M_1(1,3,2)$ по направлению к точке $M_2(0,5,0)$
8. $u = \sqrt{x^2+y^2}$ в точке $M_0(3,4)$ по направлению: а) вектора $\vec{a}(1,1)$; б) радиуса-вектора точки M_0; в) вектора $\vec{s}(4,3)$.
9. $u = arctg\left(\dfrac{y}{x}\right)$ в точке $M_0(2,-2)$ окружности $x^2 + y^2 = 4x$ вдоль дуги этой окружности.
10. $u = \ln(xy + xz + yz)$ в точке $M_0(0,1,1)$ по направлению окружности $x = \cos t;\ y = \sin t;\ z = 1$.

Градиент скалярного поля

Рассмотрим формулу для нахождения производной по направлению скалярного поля:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}\cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}\cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}\cos\gamma$$

Вторые множители в каждом слагаемом являются, как известно, проекциями единичного вектора $\bar{\tau}^0$, направление которого совпадает с направлением прямой: $\bar{\tau}^0\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$.

Возьмем теперь вектор, проекциями которого на оси координат будут служить значения частных производных $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial z}$ в выбранной точке M (x, y, z). Назовем этот вектор градиентом функции u (x, y, z) и будем обозначать его символами grad u или ∇u.

Определение: Градиентом скалярного поля u (x, y, z) называется вектор, проекциями которого на координатные оси служат значения соответствующих частных производных этой функции, то есть

$$grad\ u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k. \tag{1.4}$$

Проекции градиента зависят от выбора точки M (x, y, z) и изменяются с изменением координат этой точки. Таким образом, каждой точке скалярного поля, определяемого функцией поля u (x, y, z), соответствует определенный вектор – градиент этой функции. Отметим, что градиент линейной функции u=ax+by+cz+d есть постоянный вектор: grad u=ai+bj+ck.

Пользуясь определением градиента, формуле для производной по направлению можно придать такой вид: $\frac{\partial u}{\partial l} = grad\ u \cdot \bar{\tau}^0$.

Следовательно:

Производная функции по данному направлению равна скалярному произведению градиента функции на единичный вектор этого направления.

Теорема. Производная поля в каждой точке M по любому направлению $\bar{l}$ есть проекция вектора *grad u* на направление $\bar{l}$:

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M) = \text{пр}_l \overline{grad} u(M)$$

Доказательство непосредственно следует из определения градиента и формулы для вычисления производной по направлению:

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M) = \frac{\partial u}{\partial x}(M) cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(M) cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}(M) cos\gamma = \text{пр}_{\bar{l}} \overline{grad}(M)$$

Из данной теоремы следует, что производная скалярного поля по данному направлению равна также:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = |\,grad\ u\,| \cos\varphi,$$

где φ – угол между вектором *grad u* и прямой *l* (рис. 1.3.).

Отсюда сразу следует, что производная по направлению достигает наибольшего значения, когда $\cos\varphi = 1$, то есть при $\varphi = 0$.

Это наибольшее значение равно |*grad u*|,

то есть: $$max\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right) = \left|\overline{gradu}\right| \tag{1.5}$$

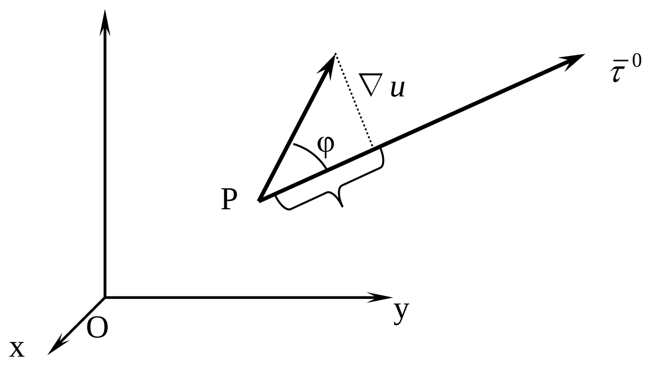


рис. 1.3

Итак, $|grad\ u|$ есть наибольшее возможное значение производной по направлению $\frac{\partial u}{\partial l}$ в данной точке М, а направление вектора *grad u* совпадает с направлением луча, выходящего из точки М, то есть направление градиента есть направление наискорейшего изменения (возрастания или убывания) функции.

Направление градиента функции u (x, y, z) в каждой точке совпадает с направлением нормали к поверхности уровня скалярного поля, проходящей через эту точку (рис. 1.4).

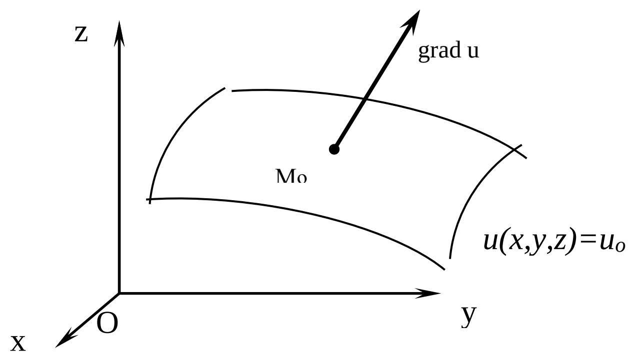


Рис. 1.4

Градиент в каждой точке перпендикулярен касательной плоскости к поверхности уровня, проходящей через данную точку, то есть его проекция на эту плоскость равна нулю. Следовательно:

Производная по любому направлению, касательному к поверхности уровня, проходящей через данную точку, равна нулю.

Укажем теперь некоторые свойства градиента функции, часто облегчающие его вычисление.

Дифференциальные свойства градиента:

1) $\overline{grad}(Cu) = C\overline{grad}u$

2) $\overline{grad}(u_1 + u_2) = \overline{grad}u_1 + \overline{grad}u_2$

3) $\overline{grad}(u_1 \cdot u_2) = u_2 \cdot \overline{grad}u_1 + u_1\overline{grad}u_2$

4) $\overline{grad}\left(\frac{u_1}{u_2}\right) = \frac{u_2\overline{grad}u_1 - u_1\overline{grad}u_2}{u_2^2}$

Все эти формулы доказываются, исходя из известных правил дифференцирования и формулы для вычисления градиента.

В математической теории поля широко используют символическое выражение, обозначаемое $\vec{\nabla}$ ("набла"): $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$, напоминающее по форме вектор, разложенный по базисным ортам $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, где вместо координат вектора записаны операторы дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$. Это выражение называют векторным дифференциальным оператором или оператором Гамильтона. Применим оператор Гамильтона к записи градиента и его свойств:

1) $\overline{grad}u = \nabla u$;
2) $\nabla(Cu) = C\nabla u$

3) $\nabla(u_1 + u_2) = \nabla u_1 + \nabla u_2$

4) $\nabla(u_1 \cdot u_2) = \mathrm{u}_2 \cdot \nabla \mathrm{u}_1 + \mathrm{u}_1 \cdot \nabla \mathrm{u}_2$

5) $\nabla\left(\frac{u_1}{u_2}\right) = \frac{u_2\nabla u_1 - u_1\nabla u_2}{u_2^2}$

В плоском поле $u=u\ (x, y)$: $grad\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}$ (1.6)

Если в плоском поле построена достаточно густая сетка линий уровня (рис. 1.5), то можно с некоторым приближением графически определить модуль и направление градиента. Направление градиента будет перпендикулярно к линии уровня. Производная в этом направлении будет при достаточно малом h приближенно равна $\frac{\partial u}{\partial l} \approx \frac{u(M) - u(M_0)}{M_0M} = \frac{h}{M_0M}$,

где M_o – точка линии уровня u (x, y)=C, а M – точка линии уровня u (x, y)=C+h. Величина h известна, а длина отрезка M_oM может быть измерена на чертеже как расстояние по нормали между соседними линиями уровня. Производная же по направлению градиента равна его модулю, и поэтому

$$|grad\ u| \approx \frac{h}{M_0 M}.$$

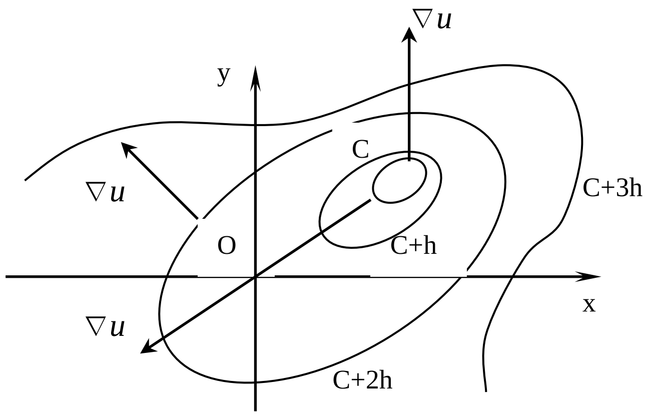


Рис. 1.5 Направление градиента в плоском поле

Пример 1: Найти градиент скалярного поля $u(x, y) = \sqrt{4 + x^2 + y^2}$ в точке *M(2; 1).*

Решение. По формуле (1.6): $grad\ u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}$.

Вычислим частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ в указанной точке:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(M) = \frac{x}{\sqrt{4 + x^2 + y^2}} = \frac{2}{3};\ \frac{\partial u}{\partial y}(M) = \frac{y}{\sqrt{4 + x^2 + y^2}} = \frac{1}{3};$$

Тогда: $grad\ u = \frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j}$.

Пример 2: Найти наибольшую скорость изменения поля $u = arctg\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}$ в точке $A(1, 1, 1)$.

Решение. Найдём частные производные функции $u(x, y, z)$ и вычислим их в точке A:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2+z^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{z^2+y^2}} = \frac{\sqrt{y^2+z^2}}{(x^2+y^2+z^2)}\Bigg| \ ;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_A = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2+z^2}} \cdot \frac{-xy}{\sqrt{(y^2+z^2)^3}} = \frac{-xy}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{y^2+z^2}}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_A = -\frac{1}{3\sqrt{2}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{-xz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{y^2+z^2}}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_A = -\frac{1}{3\sqrt{2}}$$

Таким образом, получаем:

$$\overline{grad}u(A)) = \frac{\sqrt{2}}{3}\bar{\imath} - \frac{\sqrt{2}}{6}\bar{\jmath} - \frac{\sqrt{2}}{6}\bar{k},$$

$$max\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right) = |\overline{grad}u| = \sqrt{\frac{2}{9}+\frac{1}{18}+\frac{1}{18}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Пример3: Найти градиент скалярного поля $u = \frac{\sqrt{x}}{z} - \frac{\sqrt{y}}{x} + 2xyz$ в точке $M_1(1;1;-1)$.

Решение: Используем формулу(1.4), получим:

$$\overrightarrow{grad}\,u(M_1) = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_1} \cdot \vec{i} + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_1} \cdot \vec{j} + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_1} \cdot \vec{k} = \left.\left(\frac{1}{z\cdot 2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{y}}{x^2} + 2yz\right)\right|_{M_1} \cdot \vec{i} +$$

$$+\left.\left(-\frac{1}{x\cdot 2\sqrt{y}} + 2xz\right)\right|_{M_1} \cdot \vec{j} + \left.\left(-\frac{\sqrt{x}}{z^2} + 2xy\right)\right|_{M_1} \cdot \vec{k} = \left(\frac{1}{-1\cdot 2\cdot\sqrt{1}} + \frac{\sqrt{1}}{1^2} + 2\cdot 1\cdot(-1)\right)\vec{i} +$$

$$+\left(-\frac{1}{1\cdot 2\cdot\sqrt{1}} + 2\cdot 1\cdot(-1)\right)\vec{j} + \left(-\frac{\sqrt{1}}{(-1)^2} + 2\cdot 1\cdot 1\right)\vec{k} = -\frac{3}{2}\vec{i} - \frac{5}{2}\vec{j} + \vec{k}.$$

Таким образом $\overrightarrow{grad}\,u(M_1) = -\frac{3}{2}\vec{i} - \frac{5}{2}\vec{j} + \vec{k}$.

Пример 4: Найти величину и направление наибольшего изменения скалярного поля $u(M) = 5x^2yz - 7xy^2z + 5xyz^2$ в точке $M_0(1;1;1)$.

Решение: Так как направление вектора градиента есть направление наибыстрейшего изменения скалярного поля, то найдем градиент данной функции в заданной точке:

$$\overrightarrow{grad}\,u(M_0)=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}\cdot\vec{i}+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}\cdot\vec{j}+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}\cdot\vec{k}=\left.\left(10xyz-7y^2z+5yz^2\right)\right|_{M_0}\cdot\vec{i}+$$

$$+\left.\left(5x^2z-14xyz+5xz^2\right)\right|_{M_0}\cdot\vec{j}+\left.\left(5x^2y-7xy^2+10xyz\right)\right|_{M_0}\cdot\vec{k}=$$

$$=\left(10\cdot1\cdot1\cdot1-7\cdot1^2\cdot1+5\cdot1\cdot1^2\right)\vec{i}+\left(5\cdot1^2\cdot1-14\cdot1\cdot1\cdot1+5\cdot1\cdot1^2\right)\vec{j}+$$

$$+\left(5\cdot1^2\cdot1-7\cdot1\cdot1^2+10\cdot1\cdot1\cdot1\right)\vec{k}=8\vec{i}-4\vec{j}+8\vec{k}\,.$$

Таким образом, направление наибыстрейшего изменения скалярного поля определяется вектором $grad\,u=\overrightarrow{\{8;\,-4;\,8\}}$.

Наибольшая скорость изменения этого поля равна:

$$max\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)=\left|\overrightarrow{grad u}\right|=\sqrt{8^2+(-4)^2+8^2}=\sqrt{144}=12$$

Пример 5: Найти угол между градиентами скалярных полей *u(x,y,z)* и *v(x,y,z)* в точке M, если $v=x^2+9y^2+6z^2$, $u=xyz$, M $(1,\frac{1}{3},\frac{1}{\sqrt{6}})$.

Решение: Найдем градиенты скалярных полей *u(x,y,z)* и *v(x,y,z)* в указанной точке M.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M=yz|_M=\frac{1}{3\sqrt{6}};\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M=xz|_M=\frac{1}{\sqrt{6}};\ \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M=xy|_M=\frac{1}{3}.$$

Следовательно, $grad\ u(M)=\frac{1}{3\sqrt{6}}\cdot\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\vec{j}+\frac{1}{3}\cdot\vec{k}$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_M=2x|_M=2;\ \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_M=18y|_M=6;\ \left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_M=12z|_M=\frac{12}{\sqrt{6}}=2\sqrt{6}.$$

Таким образом, $grad\,v(M)=2\cdot\vec{i}+6\cdot\vec{j}+2\sqrt{6}\cdot\vec{k}$.

Как известно, угол между двумя векторами находят по формуле:

$$cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$

Примем $\vec{a}=grad\,u(M)=\left\{\frac{1}{3\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{1}{3}\right\}$; $\vec{b}=\ grad\,v(M)=\{2;6;2\sqrt{6}\}$.

Тогда, скалярное произведение равно:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{3\sqrt{6}}\cdot2+\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot6+\frac{1}{3}\cdot2\sqrt{6}=\frac{22}{3\sqrt{6}}.$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{\left(\frac{1}{3\sqrt{6}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{54}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}}=\sqrt{\frac{16}{54}}=\frac{4}{3\sqrt{6}}$$

$$|\vec{b}|=\sqrt{2^2+6^2+\left(2\sqrt{6}\right)^2}=\sqrt{4+36+24}=8.$$

Следовательно, получаем:

$cos\varphi=\frac{22\cdot3\cdot\sqrt{6}}{3\sqrt{6}\cdot4\cdot8}=\frac{11}{16}$ => искомый угол $\varphi=\arccos\frac{11}{16}$.

Упражнения для самостоятельного решения

В задачах 1-6 найти градиент данного скалярного поля $u(x;y;z)$ в заданной точке.

1. $u = e^{xy} - yz^2$ в точке A(0;-1;1)
2. $u(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - xy - 4x + 2y - 4z$ в точке M(0; 0; 0)
3. $u(x,y,z) = 3x^2 y - 3y^3 + y^4$ в точке M(1; 2; 1)
4. $u = arctg\frac{y}{x} - \frac{2}{z}$
5. $u = x^2 yz - xy^2 z + xyz^2$ в точке M(1; 1; 1)
6. $u = x + \ln(y^2 + z^2)$ в точке M(1;-3;4).

7. В точке O (0;0) найти направление, в котором функция $z = x\sin y + y\cos x$ изменяется быстрее всего.

8. Найти направление наибольшего изменения скалярного поля $z=\ln(x^2+4y^2)$ в точке $M(6;\ 4;\ \ln 100)$.Чему равна наибольшая скорость этого изменения?
9. Найти наибольшую скорость изменения скалярного поля $u=x^y - 3xz^2$ в точке M(2; 2; 4).
10. Каково направление наибольшего изменения функции $u(x,y,z)=x\sin z - y\cos z$ в начале координат? Найдите наибольшую скорость изменения этого поля в начале координат.
11. Скалярное поле задано функцией $u = \arcsin\dfrac{x}{x+y}$. Найти угол между градиентами этого поля в точках A(1; 1) и B(3; 4).
12. Даны функции $u = \sqrt{x^2 + y^2}$, $v = x - 3y + \sqrt{3xy}$. Найти угол между градиентами этих функций в точке M (3; 4).
13. Найти угол φ между градиентами скалярных полей $v = \dfrac{6}{x} + \dfrac{2}{y} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}z}$, $u = \dfrac{x^2}{y^2 z^3}$ в точке M $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
14. Найти градиент и производную по направлению скалярного поля $u = \dfrac{3}{2}x^2 + 3y^2 - 2z^2$ в точке $M_0\left(2; \dfrac{1}{3}; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

https://ischanow.com/category/teoriya-polya/skalyarnoe-pole

Вопросы для повторения

1. Какие математические поля Вы знаете?
2. Какое поле называется стационарным?
3. Сформулируйте определение скалярного поля. Приведите примеры скалярных полей.
4. Перечислите основные характеристики скалярного поля.
5. Что называют поверхностями уровня скалярного поля? Что характеризуют эти поверхности?
6. Какие линии называют линиями уровня скалярного поля? Приведите примеры линий уровня.
7. Что называется производной по направлению скалярного поля? Как она вычисляется в случае пространственного и плоского скалярного поля?
8. В чем заключается смысл производной по направлению скалярного поля?
9. Сформулируйте определение градиента скалярного поля. Как находится градиент в заданной точке?
10. Как направлен градиент скалярного поля? Как изменяется производная скалярного поля по направлению градиента?
11. Сформулируйте дифференциальные свойства градиента скалярного поля.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО РАЗДЕЛУ «СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ»

Вариант 1

1. Плоское скалярное поле определено функцией $u = \dfrac{12}{x^2+y^2}$.

   Построить линии уровня для u=1, u=3.
2. Найти производную скалярного поля u(x,y,z) в точке M по направлению вектора I.

   $U = \left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}$, $I = i-j+k$, $M(1,1,1)$.
3. Найти угол между градиентами скалярных полей

   $v(x,y,z) = \dfrac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3$ и $u(x,y,z) = \dfrac{yz^2}{x^2}$ в точке M $(\sqrt{2}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}})$.

Вариант 2

1. Плоское скалярное поле определено функцией $u = y^2 - x$.

   Построить линии уровня для u=0, u=1, u=2.
2. Найти производную скалярного поля u(x,y,z) в точке M по направлению вектора I.

   $U = x + \ln\left(z^2+y^2\right)$, $I = -2i+j-k$, $M(2,1,1)$.

   2.1. Найти угол между градиентами скалярных полей

   $v(x,y,z) = \dfrac{4\sqrt{6}}{x} - \dfrac{\sqrt{6}}{9y} + \dfrac{3}{z}$ и $u(x,y,z) = x^2yz^3$ в точке M $(2, \dfrac{1}{3}, \sqrt{\dfrac{3}{2}})$.

Вариант 3

1. Плоское скалярное поле определено функцией $u = \dfrac{y-3}{x^2}$.

   Построить линии уровня для u=0, u=1, u=2.
2. Найти производную скалярного поля u(x,y,z) в точке M по направлению вектора I.

   $U = x^2y - \sqrt{xy+z^2}$, $I = 2j-2k$, $M(1,5,-2)$.
3. Найти угол между градиентами скалярных полей

   $v(x,y,z) = 9\sqrt{2}x^3 - \dfrac{y^3}{2\sqrt{2}} - \dfrac{4z^3}{\sqrt{3}}$ и $u(x,y,z) = \dfrac{z^3}{xy^2}$ в точке M $(\dfrac{1}{3}, 2, \sqrt{\dfrac{3}{2}})$.

Вариант 4

1. Плоское скалярное поле определено функцией $u = x^2 + 3y$.
   Построить линии уровня для u=0, u=3, u=6.
2. Найти производную скалярного поля u(x,y,z) в точке M по направлению вектора I.
   $U = y \cdot ln\left(1 + x^2\right) - arctg\, z$, $I = 2i\text{-}3j\text{-}2k$, $M(0,1,1)$.
3. Найти угол между градиентами скалярных полей
   $v(x,y,z) = \frac{3}{x} + \frac{4}{y} - \frac{1}{\sqrt{6}z}$ и $u(x,y,z) = \frac{z}{x^3 y^2}$ в точке M $(1, 2, \frac{1}{\sqrt{6}})$.

Вариант 5

1. Плоское скалярное поле определено функцией $u = y^2 - 2x + 1$.
   Построить линии уровня для u=0, u=1, u=2.
2. Найти производную скалярного поля u(x,y,z) в точке M по направлению вектора I.
   $U = x\left(ln\, y - arctg\, z\right)$, $I = 8i+4j+8k$, $M(-2,1,-1)$.
3. Найти угол между градиентами скалярных полей
   $v(x,y,z) = \frac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3$ и $u(x,y,z) = \frac{x^2}{yz^2}$ в точке M $(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

Вариант 6

1. Плоское скалярное поле определено функцией $u = arcsin\frac{2x}{x^2 + y^2}$.
   Построить линии уровня для u=$\pm\frac{\pi}{2}$.
2. Найти производную скалярного поля u(x,y,z) в точке M по направлению вектора I.
   $U = ln\left(3 - x^2\right) + xy^2 z$, $I = -i+2j-2k$, $M(1,3,2)$.
3. Найти угол между градиентами скалярных полей
   $u = \frac{z^2}{xy^2}$, $v = 3\sqrt{2}x^2 - \frac{y^2}{\sqrt{2}} - 3\sqrt{2}z^2$ в точке M $(\frac{1}{3}, 2, \sqrt{\frac{2}{3}})$.

Вариант 7

1. Плоское скалярное поле определено функцией $u = arctg\dfrac{2x}{x^2+y^2}$.

   Построить линии уровня для u=$\pm\dfrac{\pi}{4}$.

2. Найти производную скалярного поля u(x,y,z) в точке M по направлению вектора I.

   $U = sin(x+2y)+\sqrt{xyz}$, $I = 4i+3j$, $M(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2},3)$.

3. Найти угол между градиентами скалярных полей

   $u = \dfrac{xz^2}{y}$, $v = 6\sqrt{6}x^3 - 6\sqrt{6}y^3 + 2z^3$ в точке M ($\dfrac{1}{\sqrt{6}},\dfrac{1}{\sqrt{6}},1$).

Вариант 8

1. Плоское скалярное поле определено функцией $u = y^2 - 4x$.

   Построить линии уровня для u=0, u=4, u=8.

2. Найти производную скалярного поля u(x,y,z) в точке M по направлению вектора I.

   $U = x^2y^2z - ln(z-1)$, $I = 5i-6j+2\sqrt{5}\,k$, $M(1,1,2)$.

3. Найти угол между градиентами скалярных полей

   $u = \dfrac{yz^2}{x}$, $v = \dfrac{\sqrt{6}}{2x} - \dfrac{\sqrt{6}}{2y} + \dfrac{2}{3z}$ в точке M ($\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}$).

Вариант 9

1. Плоское скалярное поле определено функцией $u = \dfrac{2x}{x^2+y^2}$.

   Построить линии уровня для u=$\dfrac{1}{2}$, u=1.

2. Найти производную скалярного поля u(x,y,z) в точке M по направлению вектора I.

   $U = x^3 + \sqrt{y^2+z^2}$, $I = j-k$, $M(1,-3,4)$.

3. Найти угол между градиентами скалярных полей

   $u = \dfrac{xy^2}{z^2}$, $v = 3\sqrt{2}x^2 - \dfrac{y^2}{\sqrt{2}} - 3\sqrt{2}z^2$ в точке M ($\dfrac{1}{3},2,\sqrt{\dfrac{2}{3}}$).

Вариант 10

1. Скалярное поле определено функцией $u = arcsin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

   Построить линии уровня для u=$\frac{\pi}{4}$, u=$\frac{\pi}{2}$.
2. Найти производную скалярного поля u(x,y,z) в точке M по направлению вектора I.

   $U = \frac{\sqrt{x}}{y} - \frac{yz}{x+\sqrt{y}}$, $I = 2i+k$, $M(4,1,-2)$.
3. Найти угол между градиентами скалярных полей

   $u = \frac{x^3y^2}{z}$, $v = \frac{3}{x} + \frac{4}{y} - \frac{1}{\sqrt{6}z}$ в точке M $(1,2,\frac{1}{\sqrt{6}})$.

Вариант 11

1. Скалярное поле определено функцией $u = arctg\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

   Построить линии уровня для u=$\frac{\pi}{4}$, u=$\frac{\pi}{3}$.
2. Найти производную скалярного поля u(x,y,z) в точке M по направлению вектора I.

   $U = \sqrt{xy} + \sqrt{9-z^2}$, $I = -2i+2j-k$, $M(1,1,0)$.
3. Найти угол между градиентами скалярных полей

   $u = \frac{1}{x^2yz}$, $v = -\frac{4\sqrt{2}}{x} + \frac{\sqrt{2}}{9y} + \frac{1}{\sqrt{3}z}$ в точке M $(2,\frac{1}{3},\frac{1}{\sqrt{6}})$.

Вариант 12

1. Плоское скалярное поле определено функцией $u = \sqrt{4+x^2+y^2}$.

   Построить линии уровня для u=3,u=4.
2. Найти производную скалярного поля u(x,y,z) в точке M по направлению вектора I.

   $U = 2\sqrt{x+y} + y\,arctg\,z$, $I = 4i-3k$, $M(3,-2,1)$.
3. Найти угол между градиентами скалярных полей

   $u = \frac{x^2}{y^2z^3}$, $v = \frac{6}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}z}$ в точке M $(\sqrt{2},\sqrt{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Вариант 13

1. Плоское скалярное поле определено функцией $u = arcsin\frac{x}{x+y}$.

   Построить линии уровня для u= 0, u=$\frac{\pi}{6}$.
2. Найти производную скалярного поля u(x,y,z) в точке M по направлению вектора I.

   $U = z^2 + 2arctg(x-y)$ $\quad$ $I = i+2j-2k$, $\quad$ $M(1,2,-1)$.
3. Найти угол между градиентами скалярных полей

   $u = xyz$, $\quad v = x^2 + 9y^2 + 6z^2$ $\quad$ в точке M $(1,\frac{1}{3},\frac{1}{\sqrt{6}})$.

Вариант 14

1. Плоское скалярное поле определено функцией $u = arctg\frac{x}{y}$.

   Построить линии уровня для u=$\frac{\pi}{4}$, u=$\frac{\pi}{6}$.
2. Найти производную скалярного поля u(x,y,z) в точке M по направлению вектора I.

   $U = ln(x^2 + y^2) + xyz$, $\quad$ $I = i-j+5k$, $\quad$ $M(1,-1,2)$.
3. Найти угол между градиентами скалярных полей

   $u = \frac{y^3}{x^2 z}$, $\quad v = \frac{2}{x} + \frac{3}{2y} - \frac{\sqrt{6}}{4z}$ $\quad$ в точке M $(\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{3}{2}},\frac{1}{2})$.

Вариант 15

1. Плоское скалярное поле определено функцией $u = \sqrt{2 + x^2 + y^2}$.

   Построить линии уровня для u=2, u=4.
2. Найти производную скалярного поля u(x,y,z) в точке M по направлению вектора I.

   $U = xy - \frac{x}{z}$, $\quad$ $I = 5i+j-k$, $\quad$ $M(-4,3,-1)$.
3. Найти угол между градиентами скалярных полей

   $u = xy^2 z$, $\quad v = \sqrt{2}x^2 - \frac{3y^2}{\sqrt{2}} - 6\sqrt{2}z^2$ $\quad$ в точке M $(1,\frac{2}{3},\frac{1}{\sqrt{6}})$.

Вариант 16

1. Плоское скалярное поле определено функцией $u = \dfrac{9}{x^2 + y^2}$.

   Построить линии уровня для u=1, u=3.
2. Найти производную скалярного поля u(x,y,z) в точке M по направлению вектора I.

   $U = 4\,ln\left(3 + x^2\right) - 8xyz$, $\quad I = i\text{-}j\text{+}k$, $\quad M(1,1,1)$.
3. Найти угол между градиентами скалярных полей

   $u = \dfrac{x}{yz^2}$, $\quad v = -\dfrac{\sqrt{6}}{2x} + \dfrac{\sqrt{6}}{2y} - \dfrac{2}{3z}$ в точке M ($\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}$).

Вариант 17

1. Плоское скалярное поле определено функцией $u = y^2 + 2x$.

   Построить линии уровня для u=0, u=1, u=2.
2. Найти производную скалярного поля u(x,y,z) в точке M по направлению вектора I.

   $U = x\sqrt{y} + y\sqrt{z}$, $\quad I = -2i+j-k$, $\quad M(2,4,4)$.
3. Найти угол между градиентами скалярных полей

   $u = \dfrac{y^2 z^3}{x^2}$, $\quad v = \dfrac{6}{x} + \dfrac{2}{y} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}z}$ в точке M ($\sqrt{2}, \sqrt{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}$).

Вариант 18

1. Плоское скалярное поле определено функцией $u = \dfrac{y+4}{x^2}$.

   Построить линии уровня для u=0, u=1, u=2.
2. Найти производную скалярного поля u(x,y,z) в точке M по направлению вектора I.

   $U = -2\,ln\left(x^2 - 5\right) - 4xyz$, $\quad I = 2j-2k$, $\quad M(1,1,1)$.
3. Найти угол между градиентами скалярных полей

   $u = \dfrac{y^2 z^3}{x}$, $\quad v = \dfrac{1}{\sqrt{2}x} - \dfrac{2\sqrt{2}}{y} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2z}$ в точке M ($\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}$).

Вариант 19

1. Плоское скалярное поле определено функцией $u = x^2 + y - 2$.
   Построить линии уровня для u=0, u=3, u=6.
2. Найти производную скалярного поля u(x,y,z) в точке М по направлению вектора I.
   $U = \frac{1}{4}x^2 y - \sqrt{x^2 + 5z^2}$, $I = 2i\text{-}3j\text{-}2k$, $M(-2, \frac{1}{2}, 1)$.
3. Найти угол между градиентами скалярных полей
   $u = \frac{y}{xz^2}$, $v = 6\sqrt{6}x^3 - 6\sqrt{6}y^3 + 2z^3$ в точке М $(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 1)$.

Вариант 20

1. Плоское скалярное поле определено функцией $u = y^2 + 2x + 1$.
   Построить линии уровня для u=0, u=1, u=2.
2. Найти производную скалярного поля u(x,y,z) в точке М по направлению вектора I.
   $U = xz^2 - \sqrt{x^3 y}$, $I = 8i+4j+8k$, $M(2,2,4)$.
3. Найти угол между градиентами скалярных полей
   $u = \frac{yz^2}{x}$, $v = x^2 - y^2 - 3z^2$ в точке М $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

Вариант 21

1. Плоское скалярное поле определено функцией $u = arcsin\frac{2}{x^2 + y^2}$.
   Построить линии уровня для u=$\frac{\pi}{2}$, u=$\frac{\pi}{6}$.
2. Найти производную скалярного поля u(x,y,z) в точке М по направлению вектора I.
   $U = x\sqrt{y} - yz^2$, $I = -i+2j-2k$, $M(2,1,-1)$.
3. Найти угол между градиентами скалярных полей
   $u = \frac{z^2}{x^2 y^2}$, $v = \frac{3x^2}{\sqrt{2}} - \frac{y^2}{\sqrt{2}} + 2z^2$ в точке М $(\frac{2}{3}, 2, \sqrt{\frac{2}{3}})$.

Вариант 22

1. Плоское скалярное поле определено функцией $u = \dfrac{2}{x^2 + y^2}$.

   Построить линии уровня для u=2, u=8.
2. Найти производную скалярного поля u(x,y,z) в точке M по направлению вектора I.

   $U = 7\ln\left(\dfrac{1}{13} + x^2\right) - 4xyz$, $I = 4i+3j,\quad M(1,1,1).$
3. Найти угол между градиентами скалярных полей

   $u = \dfrac{x^2}{y^2 z^3}$, $v = \dfrac{x^3}{\sqrt{2}} - \dfrac{y^3}{\sqrt{2}} - \dfrac{8z^3}{\sqrt{3}}$ в точке M $(\sqrt{2},\sqrt{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$.

Вариант 23

1. Плоское скалярное поле определено функцией $u = \dfrac{4}{x^2 + y^2}$.

   Построить линии уровня для u=1, u=4.
2. Найти производную скалярного поля u(x,y,z) в точке M по направлению вектора I.

   $U = arctg\left(\dfrac{y}{x}\right) + xz$, $I = j-k,\quad M(2,2,-1).$
3. Найти угол между градиентами скалярных полей

   $u = x^2yz^3$, $v = \dfrac{3}{2}x^2 + 3y^2 - 2z^2$ в точке M $(2,\dfrac{1}{3},\sqrt{\dfrac{3}{2}})$.

Вариант 24

1. Плоское скалярное поле определено функцией $u = \dfrac{y+4}{x^2}$.

   Построить линии уровня для u=0, u=1, u=2.
2. Найти производную скалярного поля u(x,y,z) в точке M по направлению вектора I.

   $U = \ln(1 + x^2) - xy\sqrt{z}$, $I = 2i+k,\quad M(1,-2,4).$
3. Найти угол между градиентами скалярных полей

   $u = \dfrac{x\,y^2}{z^3}$, $v = 9\sqrt{2}x^3 - \dfrac{y^3}{2\sqrt{2}} - \dfrac{4z^3}{\sqrt{3}}$ в точке M $(\dfrac{1}{3},2,\sqrt{\dfrac{3}{2}})$.

Вариант 25

1. Плоское скалярное поле определено функцией $u = \frac{y+2}{x}$.

   Построить линии уровня для u=0, u=1, u=2.
2. Найти производную скалярного поля u(x,y,z) в точке M по направлению вектора I.

   $U = \sqrt{x^2 + y^2} - z$, *I = -2i+2j-k, M(3,4,1).*
3. Найти угол между градиентами скалярных полей

   $u = \frac{1}{x\ y^2 z}$, $v = \sqrt{2}x^2 - \frac{3y^2}{\sqrt{2}} - 6\sqrt{2}z^2$ в точке M $(1, \frac{2}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}})$.

Вариант 26

1. Плоское скалярное поле определено функцией $u = \sqrt{4 + x^2 + y^2}$.

   Построить линии уровня для u=5,u=3.
2. Найти производную скалярного поля u(x,y,z) в точке M по направлению вектора I.

   $U = x\sqrt{y} - (z + y)\sqrt{x}$, *I = 4i-3k, M(1,1,-2).*
3. Найти угол между градиентами скалярных полей

   $u = \frac{1}{xy\ z}$, $v = x^2 + 9y^2 + 6z^2$ в точке M $(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}})$.

Вариант 27

1. Плоское скалярное поле определено функцией $u = arcsin\frac{x}{x\ + y}$.

   Построить линии уровня для u= 0, u=$\frac{\pi}{6}$.
2. Найти производную скалярного поля u(x,y,z) в точке M по направлению вектора I.

   $U = \sqrt{xy} - \sqrt{4 - z^2}$, *I = i+2j-2k, M(1,1,0).*
3. Найти угол между градиентами скалярных полей

   $u = \frac{x}{y^2 z^3}$, $v = \frac{1}{\sqrt{2}x} - \frac{2\sqrt{2}}{y} - \frac{3\sqrt{3}}{2z}$ в точке M $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

Вариант 28

1. Плоское скалярное поле определено функцией $u = arctg\,\dfrac{x}{y}$.

   Построить линии уровня для u=0, u=$\dfrac{\pi}{4}$, u=$\dfrac{\pi}{6}$.
2. Найти производную скалярного поля u(x,y,z) в точке M по направлению вектора I.

   $U = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}$, $I = i\text{-}j\text{+}5k$, $M(0,-3,4)$.
3. Найти угол между градиентами скалярных полей

   $u = x^2 yz, \quad v = -\dfrac{4\sqrt{2}}{x} + \dfrac{\sqrt{2}}{9y} + \dfrac{1}{\sqrt{3}z}$ в точке $M\,(2,\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{\sqrt{6}})$.

Вариант 29

1. Плоское скалярное поле определено функцией $u = \sqrt{2 + x^2 + y^2}$.

   Построить линии уровня для u=2, u=4, u=5.
2. Найти производную скалярного поля u(x,y,z) в точке M по направлению вектора I.

   $U = ln\left(1 + x^2 + y^2\right) - \sqrt{x^2 + z^2}$, $I = 5i\text{+}j\text{-}k$, $M(3,0,-4)$.
3. Найти угол между градиентами скалярных полей

   $u = \dfrac{y^2 z^3}{x^2}, \quad v = \dfrac{x^3}{\sqrt{2}} - \dfrac{y^3}{\sqrt{2}} - \dfrac{8z^3}{\sqrt{3}}$ в точке M $(\sqrt{2},\sqrt{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$.

Вариант 30

1. Плоское скалярное поле определено функцией $u = y^2 - 4x$.

   Построить линии уровня для u=0, u=4, u=8.
2. Найти производную скалярного поля u(x,y,z) в точке M по направлению вектора I.

   $U = x^2 y^2 z - ln\left(z - 1\right)$, $I = 5i\text{-}6j\text{+}2\sqrt{5}\,k$, $M(1,1,2)$.
3. Найти угол между градиентами скалярных полей

   $u = \dfrac{x^2 z}{y^3}, \quad v = -\dfrac{3x^3}{\sqrt{2}} + \dfrac{2\sqrt{2}y^3}{3} + 8\sqrt{3}z^3$ в точке M $(\sqrt{\dfrac{2}{3}},\sqrt{\dfrac{3}{2}},\dfrac{1}{2})$.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Таблица производных простых функций:

1) $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, где n – любое действительное число;

1а) $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; 1б) $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$

2) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$; 2а) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;

3) $(a^x)' = a^x \ln a$; 3а) $(e^x)' = e^x$;

4) $(\sin x)' = \cos x$;

5) $(\cos x)' = -\sin x$;

6) $(tg\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

7) $(ctg\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

8) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x|<1)$;

9) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x|<1)$;

10) $(arctg\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

11) $(arcctg\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Таблица производных сложных функций.

1) $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$, где n – любое действительное число;

1а) $(\sqrt{u})' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$; 1б) $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$

2) $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$; 2а) $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$;

3) $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$; 3а) $(e^u)' = e^u \cdot u'$;

4) $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;

5) $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;

6) $(tg\, u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$;

7) $(ctg\,u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$;

8) $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$;

9) $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$;

10) $(arctg\,u)' = \dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$;

11) $(arcctg\,u)' = -\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$.

Основные правила дифференцирования:

1) $(C)' = 0$;

2) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

3) $(u \cdot v)' = u'v + uv'$

4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

5) $(Cu)' = Cu'$

6) $\left(\dfrac{C}{v}\right)' = -\dfrac{Cv'}{v^2}$

Таблица неопределенных интегралов:

1. $\int dx = x + C$

2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

4. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$

5. $\int \cos x dx = \sin x + C$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$

8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

9. $\int e^x dx = e^x + C$

10. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1$

11. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} arctg\,\dfrac{x}{a} + C$

12. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$

13. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$

14. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + C$

Правило перехода от декартовых координат к полярным координатам в двойном интеграле:

$$x = r\cos\varphi; \quad y = r\sin\varphi; \quad dxdy = rdrd\varphi; \quad x^2 + y^2 = r^2$$

Правило перехода от декартовых координат к цилиндрическим координатам в тройном интеграле:

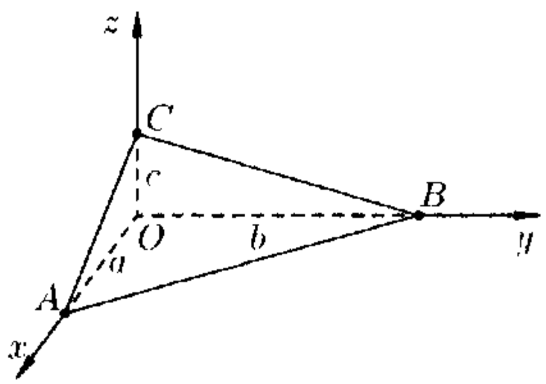
$$x = r\cos\varphi; \quad y = r\sin\varphi; \quad z = z; \quad dxdydz = rdrd\varphi dz; \quad x^2 + y^2 = r^2$$

Правило перехода от декартовых координат к сферическим координатам в тройном интеграле:

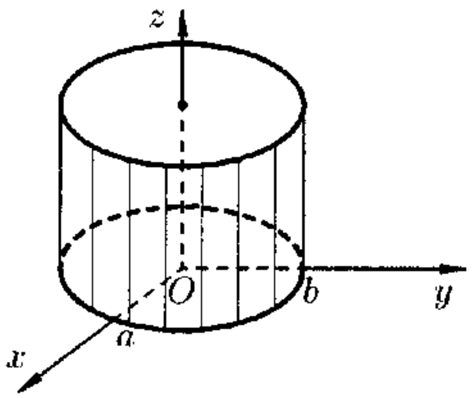
$$x = r\cos\varphi\sin\theta; y = r\sin\varphi\sin\theta; z = r\cos\theta; dxdydz = r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$$

Поверхности в пространстве

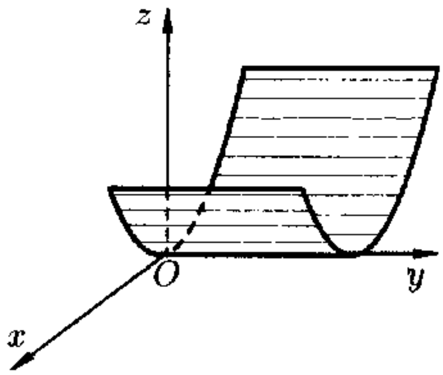
1) Уравнение плоскости в отрезках на осях: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$



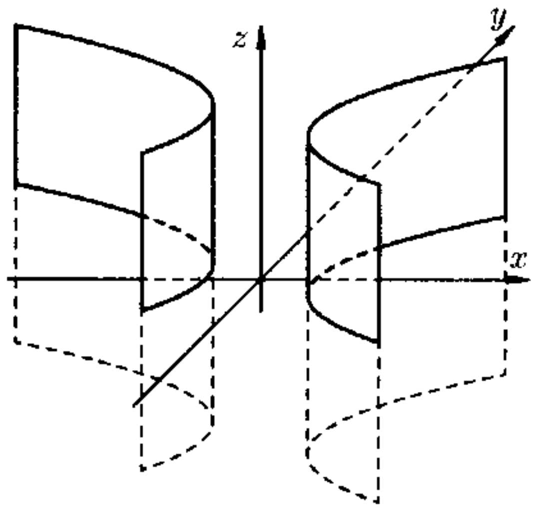
2) Уравнение кругового цилиндра: $x^2 + y^2 = R^2$ (в основании лежит круг).



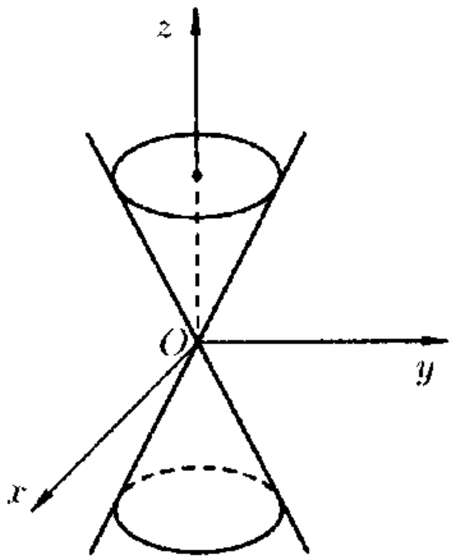
3) Уравнение параболического цилиндра: $x^2 = 2pz$.



4) Уравнение гиперболического цилиндра: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

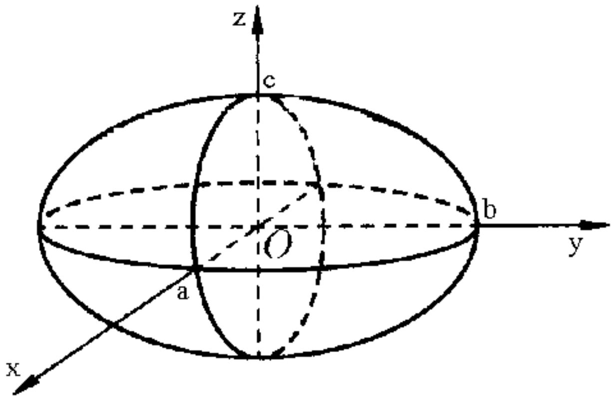


5) Уравнение конуса: $x^2 + y^2 = z^2$.

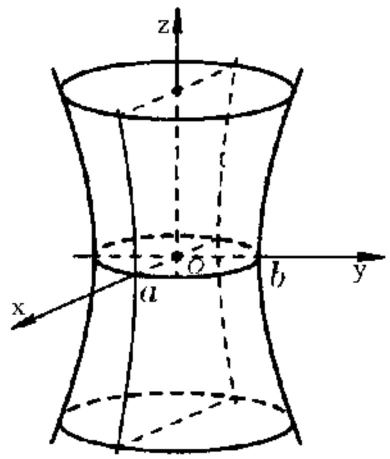


6) Уравнение эллипсоида: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$;

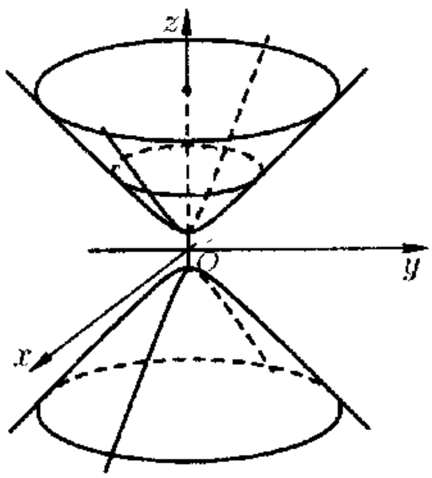
уравнение сферы: $x^2+y^2+z^2=R^2$.



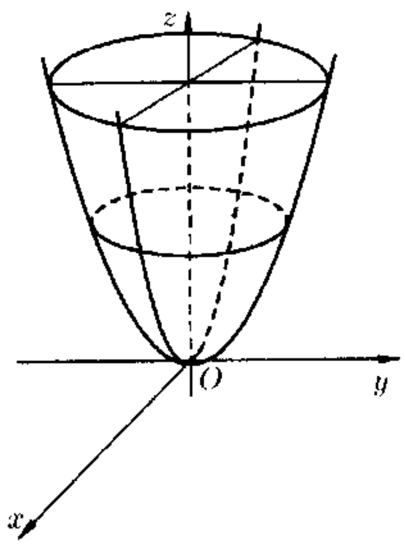
7) Уравнение однополостного гиперболоида: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$.



8) Уравнение двухполостного гиперболоида: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$.



9) Уравнение эллиптического параболоида: $\dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=2z$.



10) Уравнение гиперболического параболоида: $\dfrac{x^2}{p}-\dfrac{y^2}{q}=2z$.