4. Сформулируйте определение непрерывности функции двух переменных в точке и в области.

5. Что называется частным приращением функции двух переменных? полным приращением функции двух (нескольких) переменных?

6. Дайте определение частной производной функции двух (нескольких) переменных. Укажите геометрический смысл частных производных функции двух переменных.

7. Что называется частным дифференциалом функции двух переменных и каков его геометрический смысл?

8. Что называется полным дифференциалом функции двух (нескольких) переменных? Каков геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных?

9. Сформулируйте правило дифференцирования сложной функции.

10. Что называется полной производной и как она находится?

11. В чем смысл инвариантности полного дифференциала функции двух (нескольких) переменных?

12. Сформулируйте правило дифференцирования неявной функции одной независимой переменной; двух независимых переменных.

13. Что называется частной производной второго порядка?

14. Сформулируйте теорему о равенстве смешанных частных производных второго порядка.

15. Сформулируйте теорему о независимости частной производной высшего порядка от последовательности дифференцирования.

§ 1. ФУНКЦИЯ ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Переменная величина z называется функцией двух переменных x и y, если каждой паре значений (x, y) из области их изменения соответствует определенное значение величины z. Переменные x и y в этом случае называются независимыми переменными или аргументами.

Функциональную зависимость z от x и y обозначают так:

$$z = f(x, y) \text{ или } z = z(x, y).$$

Если $x = a$ и $y = b$, то $z = f(a, b)$ называется частным значением функции z при этих значениях аргументов. Если переменные x, y и z считать прямоугольными координатами точки $M(x, y, z)$, то каждая пара значений аргументов (x, y)

Градиент. 192.

определяет на плоскости xOy некоторую точку $P(x, y)$, а значение функции z в этой точке есть аппликата точки M. В этом смысле говорят, что функция $z = f(x, y)$ есть функция точки $P(x, y)$ и записывают $z = f(P)$.

Областью существования (или областью определения) функции $z = f(x, y)$ называется совокупность всех тех точек плоскости xOy, в которых z принимает действительные значения. Для данной функции $z = f(x, y)$ областью существования может служить либо вся плоскость xOy, либо некоторая ее часть, ограниченная одной или несколькими непрерывными линиями. Эти линии называются границами области. Область называется замкнутой, если она содержит все точки границы области.

Если функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой области D, то каждой точке $P(x, y)$ из этой области соответствует точка $M(x, y, z)$. Геометрическое место точек $M(x, y, z)$, координаты которых удовлетворяют уравнению $z = f(x,y)$, называется графиком функции двух переменных. Этот график представляется в виде некоторой поверхности, которая проектируется на плоскость xOy в область D.

1. Найти частное значение функции $z = x^3 - 5xy + y^2$ при $x = 3$ и $y = -2$.

Решение. Подставляя заданные значения аргументов, получим:

$$z(3, -2) = 3^3 - 5 \cdot 3 \cdot (-2) + (-2)^2 = 27 + 30 + 4 = 61.$$

2. $f(x, y) = x^2 + y^2$; найти $f(\sin\varphi, \cos\varphi)$.

Решение. Подставляя $\sin\varphi$ вместо переменной x и $\cos\varphi$ вместо переменной y, находим:

$$f(\sin\varphi, \cos\varphi) = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1.$$

3. Найти частное значение функции $z = \operatorname{tg} x + 3\ln y$ в точке $P(O, e)$.

Решение. При $x = 0$ и $y = e$, имеем:

$$z(O, e) = \operatorname{tg} 0 + 3\ln e = 3.$$

4. Найти частное значение функции $z = 2x^3 + 3xy - y^3$ при $x = 2$ и $y = 3$.

5. $f(x, y) = \frac{x}{y^2} - x$; найти $f(1, \cos\varphi)$.

6. Найти частное значение функции $z=\arcsin x-\cos y$ в точке $P(0, \pi)$.

7. Найти область существования функции $z=x^2+y^2$.

Решение. При любых значениях аргументов x и y функция z принимает действительные значения. Следовательно, областью существования заданной функции служит вся плоскость xOy.

8. Найти область существования функции $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

Решение. Переменная z принимает действительное значение при условии, что $1-x^2-y^2\geqslant 0$ или $x^2+y^2\leqslant 1$. Полученному неравенству удовлетворяют координаты точек, лежащих внутри и на границах круга с центром в начале координат и с радиусом, равным единице. Следовательно, область существования данной функции есть замкнутая область, границы которой — окружность $x^2+y^2=1$.

Как видно, поверхность, соответствующая заданной функции, есть верхняя половина сферы $x^2+y^2+z^2=1$ (рис. 1).

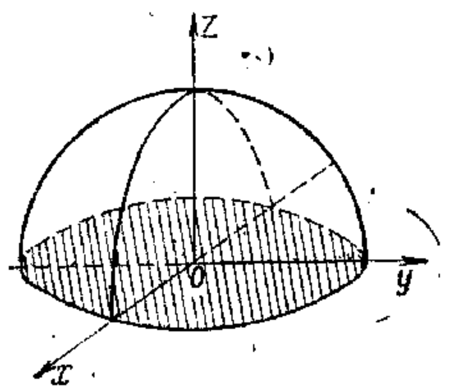

Рис. 1.

9. Найти область существования функции $z=\sqrt{x-y}$.

Решение. Функция z принимает действительные значения при $x-y\geqslant 0$, то есть при $x\geqslant y$. Точки плоскости xOy, удовлетворяющие условию $x=y$, лежат на биссектрисе координатного угла, а точки плоскости, удовлетворяющие условию $x>y$, лежат правее этой биссектрисы. Следовательно, область существования данной функции — биссектриса координатного угла и та часть плоскости xOy, которая находится правее этой биссектрисы (рис. 2).

10. Найти область существования функции $z=\ln(x^2+y)$.

Решение. Функция z определена только при условии, что $x^2+y>0$, или $y>-x^2$. Если в плоскости xOy построить параболу $y=-x^2$, то она делит всю плоскость на две части — внутреннюю и внешнюю по отношению к параболе. Как видно, совокупность точек, расположенных выше этой параболы, удовлетворяют условию $y>-x^2$. Следовательно, область существования данной функции — та часть плоскости xOy, которая расположена выше параболы $y=-x^2$ (сама парабола в область существования не входит) (рис. 3).

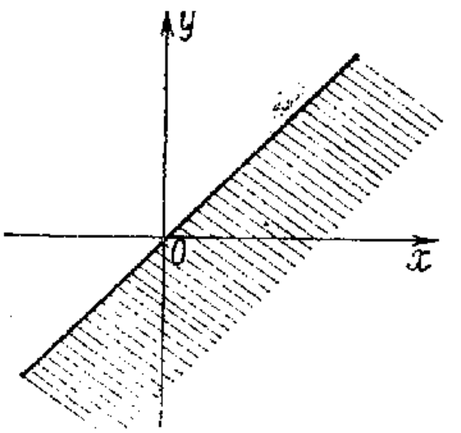

Рис. 2.

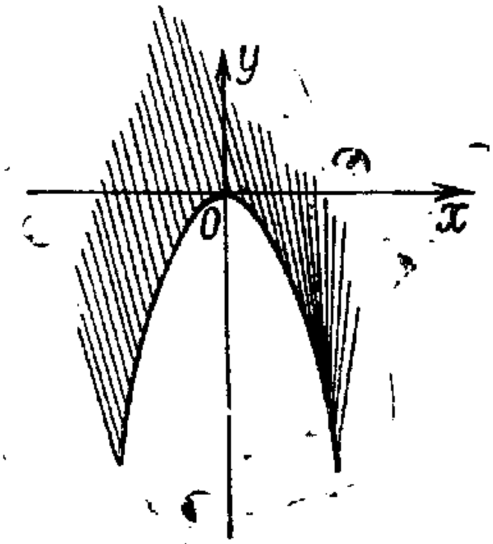

Рис. 3.

11. Найти и изобразить область существования функции z.

а) $z=2x^2+3y^2$; б) $z=\frac{1}{x-y}$; в) $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$; г) $z=\sqrt{xy}$; д) $z=\ln(x^2+2y)$; е) $z=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-9}}$; ж) $z=\ln(4+4x-y^2)$; з) $z=\sqrt{x^2+y^2-1}+\ln(25-x^2-y^2)$.

§ 2. ЧАСТНОЕ И ПОЛНОЕ ПРИРАЩЕНИЕ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Рассмотрим функцию двух переменных $z=f(x, y)$. Если переменной x дадим приращение Δx, оставляя при этом переменную y неизменной, то разность $f(x+\Delta x, y)-f(x, y)$ называется **частным приращением** функции z по переменной x и обозначается через $\Delta_x z$.

$$\Delta_x z=f(x+\Delta x, y)-f(x, y). \tag{1}$$

Если переменной y дадим приращение Δy, оставляя при этом неизменной переменную x, то разность $f(x, y+\Delta y)-$

$-f(x, y)$ называется **частным приращением** функции z по переменной y и обозначается через $\Delta_y z$.

$$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x, y). \qquad (2)$$

Если переменная x получает приращение Δx, а переменная y получает приращение Δy, то разность $f(x+\Delta x, \ y+\Delta y) - f(x, y)$ называется **полным приращением** функции z.

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y). \qquad (3)$$

12. Найти частное приращение функции $z=x^2y$ по аргументу x, если x изменяется от 3,0 до 3,2, а $y=5$.

Решение. Пользуясь формулой (1), находим $\Delta_x z$:

$$\Delta_x z = (x+\Delta x)^2 \cdot y - x^2y = 2xy \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 \cdot y.$$

При $x=3$, $\Delta x = 3{,}2-3 = 0{,}2$ и $y=5$ получаем:

$$\Delta_x z = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 0{,}2 + 0{,}04 \cdot 5 = 6{,}2.$$

13. Найти частное приращение функции $z=x^2y$ по аргументу y, если $x=3$, а аргумент y изменяется от 5 до 5,4.

Решение. Пользуясь формулой (2), находим $\Delta_y z$:

$$\Delta_y z = x^2(y+\Delta y) - x^2y = x^2 \cdot \Delta_y.$$

При $x=3$, $\Delta y = 5{,}4-5 = 0{,}4$ получаем: $\Delta_y z = 9 \cdot 0{,}4 = 3{,}6$.

14. Найти полное приращение функции $z=x^2y$, если аргумент x изменяется от 3 до 3,2, а аргумент y изменяется от 5 до 5,4.

Решение. Пользуясь равенством (3), находим полное приращение Δz:

$$\Delta z = (x+\Delta x)^2 \cdot (y+\Delta y) - x^2y.$$

Так как $x+\Delta x = 3{,}2$, а $y+\Delta y = 5{,}4$, то получаем:

$$\Delta z = (3{,}2)^2 \cdot 5{,}4 - 3^2 \cdot 5 = 55{,}296 - 45 = 10{,}296.$$

Отметим, что в общем случае полное приращение Δz не равно сумме частных приращений $\Delta_x z + \Delta_y z$. Как видно,

$$\Delta_x z + \Delta_y z = 6{,}2 + 3{,}6 = 9{,}8, \text{ а } \Delta z = 10{,}296.$$

15. Для функции $z=x^2-xy$ определить $\Delta_x z$, $\Delta_y z$ и Δz.

16. Для функции $z=x^2-xy+y^2$ определить $\Delta_x z$, $\Delta_y z$, Δz и вычислить их значения, если аргумент x изменяется от 2 до 2,4, а аргумент y изменяется от 5 до 4,8.

17. Как изменится объем цилиндра с радиусом $R=20$ *см* и высотой $H=8$ *см*, если радиус R уменьшить на 3 *см*, а высоту H увеличить на 2 *см*?

Решение. Объем V цилиндра определяется по формуле $V=\pi R^2\cdot H$. По условию приращение радиуса $\Delta R=-3$ *см*, а приращение высоты $\Delta H=2$ *см*. Пользуясь формулой (3), находим полное приращение ΔV:

$$\Delta V=\pi(20-3)^2\cdot(8+2)-\pi(20)^2\cdot 8=2890\pi-3200\pi=-310\pi.$$

Таким образом, объем цилиндра уменьшится на 310π *см*^{3}.

18. Как изменится объем цилиндра с радиусом $R=10$ *см* и высотой $H=6$ *см*, если радиус увеличить на 1 *см*, а высоту уменьшить на 1 *см*?

§ 3. ПОНЯТИЕ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ. ПОНЯТИЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ В ТОЧКЕ И В ОБЛАСТИ

Рассмотрим последовательность точек плоскости xOy:

$$P_1(x_1,y_1),\ P_2(x_2,y_2),\ P_3(x_3,y_3),\ \ldots P_n(x_n,y_n),\ \ldots \qquad (1)$$

Говорят, что последовательность (1) *сходится* к точке $P_0(a, b)$, если $x_n\to a$ и $y_n\to b$ при $n\to\infty$. Совокупность всех точек $P(x, y)$, лежащих внутри круга радиуса r с центром в точке $P_0(a, b)$, называется *окрестностью* радиуса r точки P_0.

Пусть функция $z=f(x, y)$ задана в некоторой окрестности точки $P_0(a, b)$, кроме, быть может, самой этой точки. Если для любой последовательности (1), сходящейся к точке $P_0(a, b)$, соответствующая последовательность значений функции

$$f(x_1,y_1),\ f(x_2,y_2),\ f(x_3,y_3),\ \ldots f(x_n,y_n),\ \ldots \qquad (2)$$

имеет пределом одно и то же число A, то это число A называют *пределом* функции $f(x, y)$ при $x\to a$, $y\to b$ и записывают это так:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y) = A$$