Глава 1. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

❏

⇛ *Матрицей* A размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица из m строк и n столбцов, состоящая из чисел или иных математических выражений a_{ij} (называемых *элементами матрицы*), $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Матрица A с элементами a_{ij} обозначается также (a_{ij}).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Например, $A = \begin{pmatrix} 1 & x & 3 \\ -2y & -5 & 0 \end{pmatrix}$ — матрица 2×3, ее элементы $a_{11} = 1$, $a_{12} = x$, $a_{13} = 3$, $a_{21} = -2y$, ...

Квадратной матрицей n-го порядка называется матрица размера $n \times n$. *Диагональной* называется квадратная матрица, у которой все элементы вне главной диагонали (т. е. с индексами $i \neq j$) равны нулю. *Единичной* (обозначается E) называется диагональная матрица с единицами на главной диагонали. *Нулевой* называется матрица, все элементы которой равны нулю.

Примеры матриц: а) квадратная; б) диагональная; в) единичная; г) нулевая: а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 3 & x & -1 \\ 0 & 2x & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y^2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

§ 1. ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

⇛ *Суммой матриц* $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинакового размера называется матрица $C = (c_{ij})$ того же размера, причем $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $\forall\, i, j$.

Свойства операции сложения матриц. Для любых матриц A, B и C одного размера выполняются равенства:

1) $A + B = B + A$ (коммутативность);

2) $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$ (ассоциативность).

⇛ *Произведением* матрицы $A = (a_{ij})$ на число λ называется матрица $B = (b_{ij})$ того же размера, что и матрица A, причем $b_{ij} = \lambda a_{ij}$, $\forall\, i, j$.

Свойства операции умножения матрицы на число:

1) $\lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda \cdot \mu) \cdot A$ (ассоциативность);

2) $\lambda \cdot (A+B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$ (дистрибутивность относительно сложения матриц);

3) $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$ (дистрибутивность относительно сложения чисел).

⇛ *Линейной комбинацией матриц* A и B одинакового размера называется выражение вида $\alpha \cdot A + \beta \cdot B$, где α и β — произвольные числа.

⇛ *Произведением* $A \cdot B$ *матриц* A и B (размеров $m \times n$ и $n \times r$ соответственно) называется матрица C размера $m \times r$, такая, что

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{ik} \cdot b_{kj} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

Таким образом, каждый элемент c_{ij}, находящийся в i-й строке и j-м столбце матрицы C, равен сумме произведений соответствующих элементов i-й строки матрицы A и j-го столбца матрицы B. (Говоря популярным языком, чтобы найти элемент c_{ij}, нужно «приложить» i-ю строку матрицы A к j-му столбцу матрицы B, перемножить соответствующие элементы и полученные произведения сложить). Произведение $A \cdot B$ существует, только если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

Свойства операции умножения матриц:

1) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = A \cdot B \cdot C$ (ассоциативность);

2) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ (дистрибутивность);

3) $A \cdot (B + C) = A \cdot C + B \cdot C$ (дистрибутивность);

4) вообще говоря, $A \cdot B \neq B \cdot A$ — отсутствует коммутативность.

⇛ *Коммутирующими* (или перестановочными) называются матрицы A и B, для которых $AB = BA$.

Если задан многочлен $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, то *матричным многочленом* $f(A)$ называется выражение $a_n \cdot A^n + a_{n-1} \cdot A^{n-1} + \dots$ $\dots + a_1 \cdot A + a_0 \cdot E$, где $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ раз}}$ для любого натурального n. Значением матричного многочлена $f(A)$ при заданной матрице A является матрица.

⇛ *Транспонированной* к матрице $A = (a_{ij})$ называется матрица $A^T = (a^T_{ij})$ такая, что $a^T_{ij} = a_{ji}$, $\forall\ i, j$ (т. е. все строки которой равны соответствующим столбцам матрицы A).

Элемент строки матрицы назовем *крайним*, если он отличен от нуля, а все элементы этой строки, находящиеся левее него, равны нулю. Матрица называется *ступенчатой*, если крайний элемент каждой строки находится правее крайнего элемента предыдущей строки. В матрицах A и B отмечены крайние элементы каждой строки:

$$A=\begin{pmatrix}\underline{1}&2&4&7\\0&0&\underline{1}&0\\0&\underline{-1}&-1&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}\underline{1}&2&4&7\\0&\underline{-1}&-1&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

не ступенчатая ступенчатая

Элементарными преобразованиями матрицы называются следующие операции:

1. Перемена местами двух строк (столбцов).

2. Умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля.

3. Прибавление к элементам одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца).

Матрица B, полученная из матрицы A с помощью элементарных преобразований, называется *эквивалентной* матрице A (обозначается $B\sim A$). В дальнейшем будем рассматривать элементарные преобразования только над строками.

1.1.1. Найти линейную комбинацию матриц $2A+3B$, где $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2&3&0\\2&1&1\end{pmatrix}$.

○ $2A+3B=2\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&-1\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}-2&3&0\\2&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4&6\\0&2&-2\end{pmatrix}+$
$+\begin{pmatrix}-6&9&0\\6&3&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-6&4+9&6+0\\0+6&2+3&-2+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&13&6\\6&5&1\end{pmatrix}.$ ●

Найти линейные комбинации заданных матриц:

1.1.2. $A-\lambda E$, $A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{pmatrix}$.

1.1.3. $4A-5B$, $A=\begin{pmatrix}2&-1&0\\3&4&-2\\-3&1&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&1&2\\-2&1&3\\0&2&-4\end{pmatrix}$.

1.1.4. $3A+4B$, $A=\begin{pmatrix}7&-2&3&-4\\0&2&1&-1\\-5&3&2&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&-1&-3&1\\7&-1&0&4\\8&-2&1&5\end{pmatrix}$.

1.1.5. Пусть $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&0&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&4&5\\6&0&-2\\7&1&8\end{pmatrix}$. Найти произведения AB и BA (если это возможно).

$$AB = \begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad 3} \\ 1 \quad 0 \quad -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}3\\6\\7\end{matrix}} & \begin{matrix}4\\0\\1\end{matrix} & \begin{matrix}5\\-2\\8\end{matrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{c}\text{1-я строка матрицы } A \text{ прикладывается} \\ \text{к первому столбцу матрицы } B, \\ \text{соответствующие элементы перемножаются,} \\ \text{а произведения складываются}\end{array}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{1\cdot3+2\cdot6+3\cdot7} & 1\cdot4+2\cdot0+3\cdot1 & 1\cdot5+2\cdot(-2)+3\cdot8 \\ 1\cdot3+0\cdot6+(-1)\cdot7 & 1\cdot4+0\cdot0+(-1)\cdot1 & 1\cdot5+0\cdot(-2)+(-1)\cdot8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 36 & 7 & 25 \\ -4 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Произведение BA не существует, так как число столбцов матрицы B не совпадает с числом строк матрицы A $(3 \neq 2)$. ●

Найти произведения матриц AB и BA (если они существуют):

1.1.6. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

1.1.7. $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1.1.8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

1.1.9. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

1.1.10. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1.1.11. Найти значение матричного многочлена $f(A)$, если $f(x) = -2x^2 + 5x + 9$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot1+2\cdot3 & 1\cdot2+2\cdot0 \\ 3\cdot1+0\cdot3 & 3\cdot2+0\cdot0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix},$$

$$f(A) = -2A^2 + 5A + 9E = -2 \cdot \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + 9 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -14 & -4 \\ -6 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}.$$ ●

Найти значение матричного многочлена $f(A)$:

1.1.12. $f(x) = 3x^3 + x^2 + 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

1.1.13. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

1.1.14. $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

1.1.15. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Проверить, коммутируют ли матрицы A и B:

1.1.16. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

1.1.17. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

1.1.18. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1.1.19. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.1.20. Транспонировать матрицу $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

◐ Записывая первую и вторую строки матрицы A как первый и, соответственно, второй столбец матрицы A^T, получим матрицу $A^T = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. ●

1.1.21. Транспонировать матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

◐ Так как у матрицы A две строки и три столбца, то у матрицы A^T будет три строки и два столбца: $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. ●

Транспонировать следующие матрицы:

1.1.22. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$.

1.1.23. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$.

Вычислить произведения AA^T и A^TA при заданной матрице A:

1.1.24. $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1.1.25. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

1.1.26. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$.

1.1.27. Привести к ступенчатому виду матрицу A с помощью элементарных преобразований над строками:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 0 \\ -5 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

◐ Первый этап. Сделаем нулевыми все элементы матрицы под крайним элементом первой строки. Для этого вычтем из второй строки первую, умноженную на 3, и запишем результат во вторую строку. После этого к третьей строке прибавим первую, умноженную на 5, и запишем результат в третью строку. Получим матрицу A_1.

Второй этап. Теперь сделаем равными нулю все элементы матрицы под крайним элементом второй строки. Для этого умножим вторую строку на 3, третью строку — на 2, получившиеся строки сложим и результат запишем в третью строку. Получим ступенчатую матрицу A_2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 0 \\ -5 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mathrm{II} - 3\cdot\mathrm{I} \\ \mathrm{III} + 5\cdot\mathrm{I} \end{matrix} \sim$$

$$\sim A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 2\cdot\mathrm{III} + 3\cdot\mathrm{II} \end{matrix} \sim$$

$$\sim A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$ — ступенчатая матрица. ●

1.1.28. Привести к ступенчатому виду матрицу A с помощью элементарных преобразований над строками:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 5 & 0 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

○ $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 5 & 0 & 10 & 5 \end{pmatrix} \mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{II} \sim$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 5 & 0 & 10 & 5 \end{pmatrix} \mathrm{III} - 5 \cdot \mathrm{I} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -10 & -10 & -30 \end{pmatrix} \mathrm{III} - 10 \cdot \mathrm{II} \sim$$

$$\sim B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ — ступенчатая матрица. ●

1.1.29. Привести к ступенчатому виду матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 7 \\ 2 & 3 & 3 & -2 \\ 4 & 11 & -13 & 16 \\ 7 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

○ $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 7 \\ 2 & 3 & 3 & -2 \\ 4 & 11 & -13 & 16 \\ 7 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 3 \cdot \mathrm{II} - 2 \cdot \mathrm{I} \\ 3 \cdot \mathrm{III} - 4 \cdot \mathrm{I} \\ 3 \cdot \mathrm{IV} - 7 \cdot \mathrm{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 19 & -20 \\ 0 & 17 & -19 & 20 \\ 0 & -34 & 38 & -40 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \mathrm{III} - 17 \cdot \mathrm{II} \\ \mathrm{IV} + 2 \cdot \mathrm{III} \end{matrix} \sim$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 19 & -20 \\ 0 & 0 & -342 & 360 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ — ступенчатая матрица. ●

Привести к ступенчатому виду матрицы:

1.1.30. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -5 \end{pmatrix}$.

1.1.31. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -5 & 4 \end{pmatrix}$.

1.1.32. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 13 \\ 3 & 1 & -7 & 9 \\ -1 & 2 & 0 & -10 \\ 2 & 1 & -5 & 5 \end{pmatrix}$.

1.1.33. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 11 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -3 & -18 \\ 5 & 0 & -1 & -13 \end{pmatrix}$.

1.1.34. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 12 \end{pmatrix}$.

1.1.35. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & -5 & -5 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Дополнительные задачи

Найти линейные комбинации матриц:

1.1.36. $3A-2B$, $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1\\1&-2\end{pmatrix}$.

1.1.37. $2B-5A$, $A=\begin{pmatrix}0&2&4\\-6&4&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&5&10\\-15&10&0\end{pmatrix}$.

1.1.38. $A-\lambda E$, $A=\begin{pmatrix}2&3\\3&-2\end{pmatrix}$.

1.1.39. $4A-7B$, $A=\begin{pmatrix}1&-2&5&3\\2&0&-3&1\\5&-1&0&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&2&7&-5\\-8&1&3&0\\4&2&-2&5\end{pmatrix}$.

1.1.40. $5A-3B+2C$, $A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\3&5&1\\-1&2&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5&1&-2\\-3&2&7\\4&0&-1\end{pmatrix}$,

$C=\begin{pmatrix}-5&3&1\\2&0&5\\6&4&2\end{pmatrix}$.

Найти произведения матриц AB и BA (если это возможно):

1.1.41. $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&-1\\1&2\end{pmatrix}$.

1.1.42. $A=\begin{pmatrix}1&-2&3&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5\\-3\\-4\\1\end{pmatrix}$.

1.1.43. $A=\begin{pmatrix}2&0&3\\-1&2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-4\\-3\\5\end{pmatrix}$.

1.1.44. $A=\begin{pmatrix}3&5&-1\\2&-2&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&4\\-3&0\\5&1\end{pmatrix}$.

1.1.45. $A=\begin{pmatrix}-2&3&1\\5&4&0\\2&-1&-5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-2&-3\\0&-3&1\\4&-4&5\end{pmatrix}$.

Найти произведения матриц $(AB)\cdot C$ и $A\cdot(BC)$:

1.1.46. $A=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&0\\-3&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3&-1\\2&3\end{pmatrix}$.

1.1.47. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

1.1.48. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

1.1.49. $A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу A^n:

1.1.50. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.1.51. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.1.52. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Найти значение матричного многочлена $f(A)$:

1.1.53. $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1.1.54. $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

1.1.55. $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

1.1.56. $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3x - 2$, $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1.1.57. $f(x) = x^2 - 3x + 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

1.1.58. $f(x) = 3x^2 + 5x - 2$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

1.1.59. $f(x) = x^3 - x^2 + 5$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1.1.60. $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 2$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Проверить, коммутируют ли матрицы A и B:

1.1.61. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

1.1.62. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1.1.63. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$.

1.1.64. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & -2 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 5 \\ -4 & 2 & -7 \end{pmatrix}$.

1.1.65. $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$.

1.1.66. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -4 & 5 & -6 \\ -7 & 8 & -9 \end{pmatrix}$.

1.1.67. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 5 & -6 & 7 & 8 \\ -9 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -6 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -9 \\ 8 & 7 & -6 & 5 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1.1.68. $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу A^T:

1.1.69. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1.1.70. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -7 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.1.71. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Найти произведения матриц AA^T и A^TA:

1.1.72. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1.1.73. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1.1.74. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -7 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.1.75. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

1.1.76. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.1.77. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Привести матрицу A к ступенчатому виду:

1.1.78. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. **1.1.79.** $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \end{pmatrix}$.

1.1.80. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & 2 \\ 5 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. **1.1.81.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 8 \\ 2 & -1 & -4 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & -18 & 11 & -13 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$.

1.1.82. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -7 & 0 & 7 \\ 2 & -1 & 2 & 3 & -11 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. **1.1.83.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & -7 & -4 & 7 \\ 7 & -1 & -15 & -8 & -11 \\ 1 & -1 & -3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

1.1.84. $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & -10 \\ 3 & -1 & 1 & 10 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 7 & 10 & 6 & -10 \end{pmatrix}$. **1.1.85.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -6 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1.1.86. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. **1.1.87.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 0 & -4 & 7 \\ 2 & 2 & 10 & -1 & 8 \\ 1 & -2 & -4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Контрольные вопросы и более сложные задачи

1.1.88. Если матрицы A и B можно умножать, следует ли из этого, что их можно складывать?

1.1.89. Если матрицы A и B можно складывать, следует ли из этого, что их можно умножать?

1.1.90. Можно ли умножить квадратную матрицу на неквадратную?

1.1.91. Может ли произведение неквадратных матриц быть квадратной матрицей?

1.1.92. Может ли при умножении ненулевых матриц получиться нулевая матрица?

1.1.93. Могут ли совпадать матрицы A и A^T?

1.1.94. Как выглядит матрица $(A^T)^T$?

1.1.95. Верно ли равенство $(A+B)^T = A^T + B^T$?

1.1.96. Верно ли равенство $(A+E)(A-E) = A^2 - E$?

1.1.97. Верно ли равенство $(A+E)^2 = A^2 + 2A + E$?

1.1.98. Верно ли равенство $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$?

1.1.99. Верно ли равенство $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$?

1.1.100. Могут ли быть эквивалентными матрицы с различным количеством строк? столбцов?

1.1.101. Обязательно ли существует произведение BA, если $AB = E$?