2) В точке $P_2(-\frac{5}{3}, 0)$: $A=-10$; $B=0$; $C=-\frac{4}{3}$; $\Delta=\frac{40}{3}$. Так как $\Delta>0$ и $A<0$, то в этой точке функция имеет максимум.

$$z_{\max}=z\left(-\frac{5}{3}, 0\right)=-\frac{250}{27}+\frac{125}{9}+1=5\frac{17}{27}.$$

3) В точке $P_3$ $(-1, 2)$: $A=-2$; $B=4$; $C=0$; $\Delta=-16$. Так как $\Delta<0$, то в этой точке нет экстремума.

4) В точке $P_4(-1, -2)$: $A=-2$; $B=-4$; $C=0$; $\Delta=-16$. Так как $\Delta<0$, то в этой точке нет экстремума.

**116.** Исследовать на экстремум следующие функции:

а) $z=4x-4y-x^2-y^2$;

б) $z=x^2-xy+y^2+9x-6y+20$;

в) $z=3x+6y-x^2-xy-y^2$;

г) $z=x^3+8y^3-6xy+1$;

д) $z=x^3+y^3-3xy$;

е) $z=x^3+3xy^2-15x-12y$.

## § 14. ОТЫСКАНИЕ НАИБОЛЬШЕГО И НАИМЕНЬШЕГО ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ В ЗАДАННОЙ ЗАМКНУТОЙ ОБЛАСТИ

Пусть требуется найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=f(x, y)$ в некоторой замкнутой области $D$. Этих значений функция достигает либо во внутренних точках области, которые являются стационарными точками функции, либо на границах области. Следовательно, чтобы найти наибольшее и наименьшее значение функции в заданной замкнутой области, необходимо:

1) найти стационарные точки, лежащие внутри области, и вычислить значения функции в этих точках; исследовать на экстремум эти точки нет необходимости;

2) найти наибольшее и наименьшее значение функции на границе области; если граница области состоит из нескольких линий (участков), то исследование проводится для каждого участка в отдельности;

3) сравнить все полученные значения функции; наибольшее из них будет наибольшим, а наименьшее — наименьшим значением функции в заданной области.

**117.** Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=x^2+2y^2-2x-8y+5$ в замкнутом треугольнике $AOB$, ограниченном осями координат и прямой $x+y-4=0$ (рис. 8).

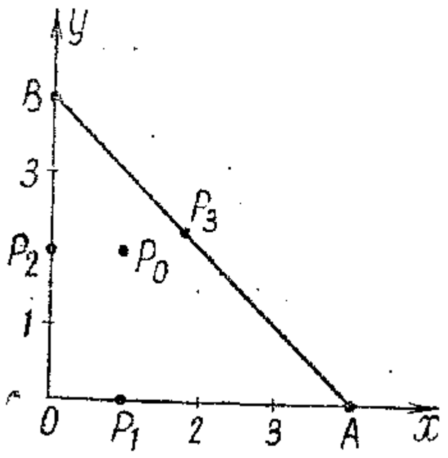


Рис. 8

*Решение.* Найдем стационарные точки.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x-2; \quad \frac{\partial z}{\partial y}=4y-8.$$

Решая систему $\begin{cases} 2x-2=0, \\ 4y-8=0, \end{cases}$

находим стационарную точку $P_0(1, 2)$. Эта точка лежит внутри области. Вычислим значение функции в этой точке.

$$z(P_0)=z(1, 2)=1+8-2-16+5=-4.$$

Граница заданной области состоит из отрезка $OA$ оси $Ox$, отрезка $OB$ оси $Oy$ и отрезка $AB$. Определим наибольшее и наименьшее значение функции $z$ на каждом из этих трех участков. На отрезке $OA$ $y=0$, а $0\leqslant x\leqslant 4$. При $y=0$ функция $z=x^2-2x+5$ есть функция одной независимой переменной $x$. Находим наибольшее и наименьшее значение этой функции на отрезке $[0, 4]$.

$$\frac{dz}{dx}=2x-2; \; 2x-2=0; \; x=1;$$

$P_1(1, 0)$ — стационарная точка. $z(P_1)=z(1,0)=4.$

Вычислим значения функции на концах отрезка $OA$, то есть в точках $O$ и $A$.

$$z(0)=z(0,\ 0)=5;\quad z(A)=z(4,\ 0)=13.$$

На отрезке $OB$ $x=0$ и $0\leqslant y\leqslant 4$. При $x=0$ имеем $z=2y^2-8y+5$. Находим наибольшее и наименьшее значение этой функции $z$ от переменной $y$ на отрезке $[0,\ 4]$.

$\frac{dz}{dy}=4y-8;\ 4y-8=0;\ y=2;\ P_2(0,\ 2)$ — стационарная точка.

$$z(P_2)=z(0,2)=-3.$$

Вычислим значения функции $z$ на концах отрезка $OB$, то есть в точках $O$ и $B$. $z(0)=z(0,\ 0)=5$; $z(B)=z(0,4)=5$. Исследуем теперь отрезок $AB$. Уравнение прямой $AB$: $y=4-x$. Подставив это выражение для $y$ в заданную функцию $z$, получим $z=x^2+2(4-x)^2-2x-8(4-x)+5$ или $z=3x^2-10x+5$. Определим наибольшее и наименьшее значение этой функции на отрезке $[0,\ 4]$.

$\frac{dz}{dx}=6x-10;\ 6x-10=0;\ x=\frac{5}{3};\ P_3\left(\frac{5}{3};\ \frac{7}{3}\right)$ — стационарная точка.

$$z(P_3)=z\left(\frac{5}{3};\ \frac{7}{3}\right)=-\frac{10}{3}.$$

Значения функции в точках $A$ и $B$ найдены ранее. Сравнивая полученные результаты, заключаем, что наибольшее значение заданная функция $z$ в заданной замкнутой области достигает в точке $A(4,\ 0)$, а наименьшее значение — в стационарной точке $P_0(1,\ 2)$. Таким образом,

$$z_{\text{наиб}}=z(4,\ 0)=13 \text{ и } z_{\text{наим}}=z(1,2)=-4.$$

**118.** Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=x^2+y^2-xy+x+y$ в замкнутом треугольнике, ограниченном осями координат и прямой $x+y+3=0$.

**119.** Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=x^2+4xy-y^2-6x-2y$ в замкнутом треугольнике, ограниченном осями координат и прямой $2x+3y-6=0$.

**120.** Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=x^2+y^2-4xy-4$ в квадрате, ограниченном осями координат и прямыми $x=4$ и $y=4$.

**121.** Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=x^2+y^2-6x+4y+2$ в прямоугольнике с вершинами $A(1, -3)$, $B(1,2)$, $C(4,2)$, $D(4, -3)$.

**122.** Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=2x^2-2y^2$ в круге $x^2+y^2\leqslant 9$.

**123.** Разложить число $a$ на три положительных слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

*Решение.* Обозначим первое слагаемое через $x$, второе — через $y$; тогда третье слагаемое будет $a-x-y$. Произведение трех слагаемых есть функция переменных $x$ и $y$.

$$z=xy(a-x-y).$$

По условию задачи требуется найти наибольшее значение функции $z$. Находим стационарные точки.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=ay-2xy-y^2; \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=ax-x^2-2xy.$$

$$\begin{cases} ay-2xy-y^2=0, \\ ax-2xy-x^2=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y(a-2x-y)=0, \\ x(a-2y-x)=0. \end{cases} \qquad (*)$$

Решение системы (*) дает 4 стационарные точки:

$$P_1(0,0);\ P_2(0,a);\ P_3(a,\ 0) \text{ и } P_4\left(\frac{a}{3};\ \frac{a}{3}\right).$$

Первые три точки не удовлетворяют условиям задачи: в этом случае $z=0$. Проверим выполнение достаточных условий для точки $P_4$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-2y; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=a-2x-2y; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2x.$$

Вычислим значения этих производных в точке $P_4\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$.

$$A=-\frac{2a}{3};\ B=a-\frac{2a}{3}-\frac{2a}{3}=-\frac{a}{3};\quad C=-\frac{2a}{3};$$

$$\Delta=AC-B^2=\frac{4a^2}{9}-\frac{a^2}{9}=\frac{a^2}{3}.$$

Так как $\Delta>0$ и $A<0$, то в исследуемой стационарной точке функция достигает максимума. Итак, произведение будет наибольшим, если число $a$ разделить на три равные части.

**124.** Определить размеры прямоугольного бассейна данного объема $V$, чтобы на его облицовку (дна и стен) потребовалось бы наименьшее количество материала.

*Решение.* Пусть $x$ и $y$ — линейные размеры дна бассейна, а $H$ — его глубина. Обозначим площадь дна и боковых стен через $z$. Очевидно, $z=xy+2(x+y)H$. Так как объем $V=xyH$, то $H=\frac{V}{xy}$. Тогда

$$z=xy+\frac{2(x+y)V}{xy} \text{ или } z=xy+\frac{2V}{y}+\frac{2V}{x}.$$

Требуется найти наименьшее значение функции $z$. Находим стационарные точки функции $z$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y-\frac{2V}{x^2}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=x-\frac{2V}{y^2}; \qquad \begin{cases} y-\dfrac{2V}{x^2}=0. \\ x-\dfrac{2V}{y^2}=0. \end{cases}$$

Решение последней системы дает одну стационарную точку

$$P_0(\sqrt[3]{2V};\ \sqrt[3]{2V}).$$

Используя достаточные условия экстремума, покажем, что в найденной стационарной точке $P_0$ функция $z$ имеет наименьшее значение. Для этого находим частные производные второго порядка.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{4V}{x^3}; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=1; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{4V}{y^3};$$

Тогда $A=2$; $B=1$; $C=2$; $\Delta=4-1=3$. Так как $\Delta>0$ и $A>0$, то в точке $P_0$ функция $z$ имеет минимум. Если $x=y=\sqrt[3]{2V}$, то $H=\frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$. Таким образом, дно бассейна есть квадрат со стороной $\sqrt[3]{2V}$, а глубина бассейна в два раза меньше стороны этого квадрата.

**125.** Найти прямоугольный параллелепипед данного объема $V$, имеющий наименьшую полную поверхность.

**126.** Найти прямоугольный параллелепипед данной поверхности $S$, имеющий наибольший объем.

**127.** Дан треугольник с вершинами $A(4; -2)$, $B(3; 6)$, $C(-1; -1)$. В плоскости треугольника $ABC$ найти точку, для которой сумма квадратов расстояний до его вершин будет наименьшей.

## §15. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

Пусть требуется исследовать на экстремум функцию $z=f(x, y)$ при условии, что сами переменные $x$ и $y$ связаны уравнением $\varphi(x, y)=0$. Геометрически это означает, что, кроме функции $z=f(x, y)$, задана еще некоторая линия $L$ в плоскости $xOy$ и требуется функцию $z$ исследовать на экстремум при условии, что экстремальные точки могут принадлежать только этой линии $L$. Эти точки называются точками условного экстремума, а уравнение, связывающее переменные $x$ и $y$, — уравнением связи.

Если из уравнения связи $\varphi(x, y)=0$ переменную $y$ выразить явно через $x$ и подставить в заданную функцию $z=f(x, y)$, то получим функцию от одной переменной $x$. Найдя те значения $x$, при которых $z$ достигает экстремума, мы подставим их в уравнение связи и определим соответствующие значения $y$. В результате будут получены точки условного экстремума. В тех случаях, когда $y$ нельзя выразить явно через $x$, то применяют так называемый метод множителей Лагранжа, сущность которого состоит в следующем.

Чтобы данную функцию $z=f(x, y)$ исследовать на экстремум при условии, что $\varphi(x, y)=0$, надо:

1) составить вспомогательную функцию Лагранжа

$$F(x, y, \lambda)=f(x, y)+\lambda\cdot\varphi(x, y), \qquad (1)$$

где $\lambda$ — вспомогательная неизвестная;

2) найти частные производные $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial \lambda}$, приравнять каждую из них нулю и решить полученную систему трех уравнений с тремя неизвестными $x$, $y$ и $\lambda$.

В результате решения системы будут получены точки, в которых функция может иметь условный экстремум, но может и не иметь его в найденных точках, так как система выражает только необходимое условие условного экстремума.

128. Исследовать на экстремум функцию $z=x^2+6x-2y+1$ при условии, что переменные $x$ и $y$ связаны уравнением $x^2+y-4=0$.