Глава 3. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

§ 1. ВЕКТОРЫ. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ. РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ

⇛ *Вектором* называется направленный отрезок. Вектор с началом в точке A и концом в точке B обозначается символом $\overline{AB}$ (или одной буквой, $\bar{a}$, $\bar{b}$, ...). Длина отрезка AB называется *длиной*, или *модулем* вектора $\overline{AB}$ и обозначается $|\overline{AB}|$, $|\bar{a}|$. Вектор, длина которого равна нулю, называется *нулевым вектором* и обозначается $\bar{0}$ или просто 0. По определению нулевой вектор не имеет направления и коллинеарен любому вектору. Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным вектором* и обозначается через $\bar{e}$.

Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\bar{a}$, называется *ортом* вектора $\bar{a}$ и обозначается $\bar{a}^0$. Два ненулевых вектора называются *противоположными*, если они имеют одинаковую длину и противоположные направления. Вектор, противоположный вектору $\bar{a}$, обозначается $-\bar{a}$; вектор $\overline{AB}$ противоположен вектору $\overline{BA}$ ($\overline{BA} = -\overline{AB}$).

⇛ Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых; записывают $\bar{a} \parallel \bar{b}$. Три (и более) вектора называются *компланарными*, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

⇛ Два коллинеарных вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются *равными* ($\bar{a} = \bar{b}$), если они сонаправлены и имеют равные длины.

Совместим параллельным переносом начала неколлинеарных векторов a и b. Начало и концы векторов образуют вершины треугольника. *Углом* между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется угол при вершине этого треугольника, соответствующий началу векторов. Если векторы сонаправлены, то угол между ними равен нулю; если противоположно направлены — угол между ними равен 180°.

⇛ *Суммой* двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}$, соединяющий начало вектора $\bar{a}$ с концом вектора $\bar{b}$, отложенного от конца вектора $\bar{a}$.

Обозначение: $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$.

Для геометрического представления суммы векторов используют правила «треугольника» и «параллелограмма», проиллюстрированные на рис. 1 и 2 соответственно.

Под *разностью* векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ понимается вектор $\bar{c}$ такой, что $\bar{b}+\bar{c} = \bar{a}$. Обозначение: $\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$. Справедливо равенство $\bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-\bar{b})$.

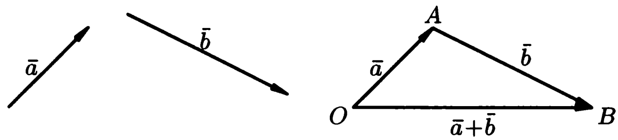

Рис. 1

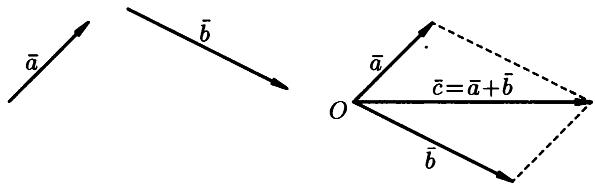

Рис. 2

⇒ ***Произведением вектора** $\bar{a} \neq 0$ **на число** $\lambda \neq 0$* называется вектор, который имеет длину $|\lambda| \cdot |\bar{a}|$, его направление если $\lambda > 0$ и противоположное направление, если $\lambda < 0$.

Обозначение: $\lambda \cdot \bar{a}$.

Отметим, что $\bar{a} = |\bar{a}| \cdot \bar{a}^0$, т. е. каждый вектор равен произведению его модуля на орт.

Два ненулевых вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда один из них есть произведение другого на некоторое число, т. е. $\bar{b} = \lambda \cdot \bar{a}$, λ — число (***признак коллинеарности векторов***).

Три ненулевых вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда один из них является линейной комбинацией других, например, $\bar{c} = \lambda_1 \cdot \bar{a} + \lambda_2 \cdot \bar{b}$ (λ_1, λ_2 — числа не равные нулю одновременно) (***признак компланарности векторов***).

3.1.1. В треугольнике ABC дано: $\overline{AB} = \bar{a}$, $\overline{AC} = \bar{b}$, точка M — середина стороны BC. Выразить вектор $\overline{AM}$ через векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

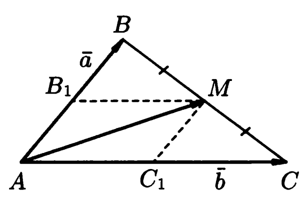

Рис. 3

◐ Через точку M проведем прямые, параллельные сторонам AB и AC. Получим параллелограмм AB_1MC_1 (рис. 3), в котором AM

является диагональю. Следовательно, $\overline{AM} = \overline{AB_1} + \overline{AC_1}$. Но $\overline{AB_1} = \frac{1}{2}\cdot\bar{a}$, $\overline{AC_1} = \frac{1}{2}\cdot\bar{b}$ (B_1M и C_1M — средние линии, поэтому $AB_1 = B_1B$, $AC_1 = C_1C$). Получаем $\overline{AM} = \frac{1}{2}\cdot\bar{a} + \frac{1}{2}\cdot\bar{b}$, т.е. $\overline{AM} = \frac{1}{2}\cdot(\bar{a}+\bar{b})$. ●

3.1.2. Какому условию должны удовлетворять ненулевые векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, чтобы имело место соотношение $|\bar{a}+\bar{b}| = |\bar{a}-\bar{b}|$?

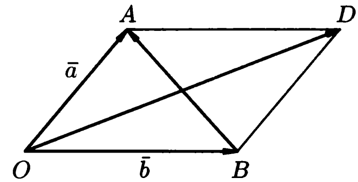

Рис. 4

◯ Построим на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, отложенных от точки O, параллелограмм $OADB$ (рис. 4). Тогда $\overline{OD} = \bar{a}+\bar{b}$, $\overline{BA} = \bar{a}-\bar{b}$. Равенство $|\bar{a}+\bar{b}| = |\bar{a}-\bar{b}|$ означает, что длины диагоналей параллелограмма равны, т.е. $|\overline{AB}| = |\overline{OD}|$. Отсюда следует, что данный параллелограмм есть прямоугольник. Следовательно, векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ перпендикулярны. ●

3.1.3. По данным векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$ построить векторы:
1) $\frac{1}{3}\bar{a} - 2\bar{b}$; 2) $4\bar{a}+\bar{b}$;
3) $2\cdot(\bar{a}-\bar{b})$;
4) $\frac{3}{4}(\bar{a}+2\bar{b}) - \frac{1}{4}(\bar{a}-2\bar{b}) - \bar{a} - \bar{b}$.

3.1.4. Даны векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Коллинеарны ли векторы $\bar{c} = \bar{a} - 2\sqrt{3}\cdot\bar{b}$ и $\bar{d} = -\sqrt{3}\cdot\bar{a} + 6\cdot\bar{b}$?

3.1.5. При каких значениях λ векторы $2\lambda\cdot\bar{a}$ и $(\lambda^3-1)\cdot\bar{a}$, $(\bar{a}\neq\bar{0})$ имеют одинаковое направление?

3.1.6. При каких значениях x векторы $x^3\cdot\bar{a}$ и $(x^2-x-2)\cdot\bar{a}$, $\bar{a}\neq\bar{0}$, противоположно направлены?

3.1.7. Дано: $|\bar{a}| = 13$, $|\bar{b}| = 19$, $|\bar{a}+\bar{b}| = 24$. Найти $|\bar{a}-\bar{b}|$.

3.1.8. Дано: $\bar{a}\perp\bar{b}$, $|\bar{a}| = 5$, $|\bar{b}| = 12$. Найти $|\bar{a}+\bar{b}|$ и $|\bar{a}-\bar{b}|$.

3.1.9. В треугольнике ABC: M — точка пересечения медиан треугольника, $\overline{AM} = \bar{a}$, $\overline{AC} = \bar{b}$. Разложить $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$ по векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

3.1.10. В параллелограмме $ABCD$: K и M — середины сторон BC и CD, $\overline{AK} = \bar{a}$, $\overline{AM} = \bar{b}$. Выразить векторы $\overline{BD}$ и $\overline{AD}$ через $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

3.1.11. Точка O является центром тяжести (точка пересечения медиан) треугольника ABC. Доказать, что $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \bar{0}$.

3.1.12. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали, пересекаясь, делятся пополам. Доказать, что этот четырехугольник — параллелограмм.

⇛ ***Проекцией вектора*** $\overline{AB}$ ***на ось*** l называется число, равное длине вектора $\overline{A_1B_1}$ (рис. 5), взятой со знаком «плюс», если направление вектора $\overline{A_1B_1}$ совпадает с направлением оси и со знаком «минус» в противном случае. Точки A_1, B_1 — это точки пересечения оси l с перпендикулярными ей плоскостями, проходящими через точки A, B.

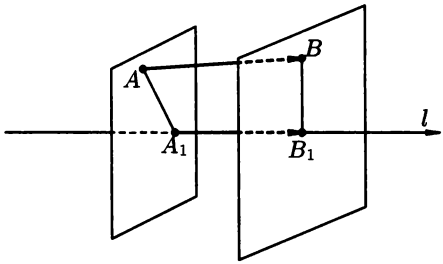

Рис. 5

Обозначение $\text{пр}_l \overline{AB}$.

Основные свойства проекции:

1. $\text{пр}_l(\bar{a} + \bar{b}) = \text{пр}_l \bar{a} + \text{пр}_l \bar{b}$;
2. $\text{пр}_l(\lambda \cdot \bar{a}) = \lambda \cdot \text{пр}_l \bar{a}$.

Если $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ — орты координатных осей прямоугольной системы координат $Oxyz$, то любой вектор $\bar{a}$ единственным образом можно представить в виде их суммы (линейной комбинации) с коэффициентами a_x, a_y и a_z: $\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k}$. Коэффициенты a_x, a_y и a_z линейной комбинации называют ***координатами вектора*** $\bar{a}$ в базисе $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$. Координаты a_x, a_y, a_z вектора $\bar{a}$ — это его проекции на соответствующие координатные оси. Вектор $\bar{a}$ с координатами a_x, a_y, a_z записывают в виде $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$. Длина вектора $\bar{a}$ определяется по формуле

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{1.1}$$

Вектор $\bar{a}$ образует с координатными осями Ox, Oy и Oz углы α, β и γ соответственно. Направление вектора $\bar{a}$ определяется с помощью ***направляющих косинусов***: $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ для которых справедливы равенства

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\bar{a}|}. \tag{1.2}$$

Направляющие косинусы связаны соотношением $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Пусть даны два вектора $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$ и $\bar{b} = (b_x; b_y; b_z)$. Тогда:

1) векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты, т. е.

$$\bar{a} = \bar{b} \iff \begin{cases} a_x = b_x, \\ a_y = b_y, \\ a_z = b_z; \end{cases}$$

2) векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их соответствующие координаты пропорциональны, т. е.

$$\bar{a} \parallel \bar{b} \iff \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}. \tag{1.3}$$

При сложении векторов их одноименные координаты складываются, при вычитании — вычитаются, при умножении вектора на число — умножаются на это число:

$$\bar{a} \pm \bar{b} = (a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z),$$
$$\lambda \cdot \bar{a} = (\lambda \cdot a_x; \lambda \cdot a_y; \lambda \cdot a_z).$$

Вектор $\bar{r} = \overline{OM}$, соединяющий начало координат с произвольной точкой M $(x;\ y;\ z)$ пространства называется *радиус-вектором* точки M. Координаты точки — это координаты ее радиус-вектора $\bar{r} = (x; y; z)$ или $\bar{r} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}$. Если вектор $\bar{a} = \overline{AB}$ задан точками A $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и B $(x_2;\ y_2;\ z_2)$, то его координаты a_x, a_y, a_z вычисляются по формулам $a_x = x_2 - x_1$, $a_y = y_2 - y_1$, $a_z = z_2 - z_1$:

$$\bar{a} = \overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1). \tag{1.4}$$

3.1.13. Даны две точки $A_1(3; -4; 1)$ и $A_2(4; 6; -3)$. Найти координаты вектора $\bar{a} = \overline{A_1A_2}$.

○ Координаты a_x, a_y, a_z вектора находятся по формуле (1.4). В данном случае имеем: $x_1 = 3$, $y_1 = -4$, $z_1 = 1$ и $x_2 = 4$, $y_2 = 6$, $z_2 = -3$, т. е. $\bar{a} = \overline{A_1A_2} = (1; 10; -4)$. ●

3.1.14. Даны три последовательные вершины параллелограмма: $A(1; -2; 3)$, $B(3; 2; 1)$, $C(6; 4; 4)$. Найти его четвертую вершину D.

○ Обозначим координаты вершины D через x, y, z, т. е. $D(x; y; z)$. Так как $ABCD$ — параллелограмм, то имеем: $\overline{BC} = \overline{AD}$. Находим координаты векторов $\overline{BC}$ и $\overline{AD}$: $\overline{BC} = (6 - 3; 4 - 2; 4 - 1)$, т. е. $\overline{BC} = (3; 2; 3)$; $\overline{AD} = (x - 1; y + 2; z - 3)$. Из равенства векторов $\overline{BC}$ и $\overline{AD}$ следует, что $x - 1 = 3$, $y + 2 = 2$, $z - 3 = 3$. Отсюда находим: $x = 4$, $y = 0$, $z = 6$. Итак, $D(4; 0; 6)$. ●

3.1.15. Найти координаты вектора $\bar{a}$, если известно, что он направлен в противоположную сторону к вектору $\bar{b} = 5 \cdot \bar{i} - 4 \cdot \bar{j} + 2\sqrt{2} \cdot \bar{k}$, и его модуль равен 5.

○ Можно записать, что $\bar{a} = 5 \cdot \bar{a}^0$. Так как вектор $\bar{a}$ направлен в противоположную сторону к вектору $\bar{b}$, то $\bar{a}^0 = -\bar{b}^0$. Найдем орт $\bar{b}^0$. Из равенства $\bar{b} = |\bar{b}| \cdot \bar{b}^0$ находим $\bar{b}^0 = \frac{\bar{b}}{|\bar{b}|}$. Но $|\bar{b}| = \sqrt{5^2 + (-4)^2 + (2\sqrt{2})^2} = 7$. Значит, $\bar{b}^0 = \frac{5}{7}\bar{i} - \frac{4}{7}\bar{j} + \frac{2\sqrt{2}}{7} \cdot \bar{k}$.

Следовательно, $\bar{a}^0 = -\frac{5}{7} \cdot \bar{i} + \frac{4}{7} \cdot \bar{j} - \frac{2\sqrt{2}}{7} \cdot \bar{k}$ и $\bar{a} = 5 \cdot \bar{a}^0 = 5 \cdot \left(-\frac{5}{7}\bar{i} + \frac{4}{7}\bar{j} - \frac{2\sqrt{2}}{7}\bar{k}\right)$, т. е. $\bar{a} = -\frac{25}{7}\bar{i} + \frac{20}{7}\bar{j} - \frac{10\sqrt{2}}{7}\bar{k}$. ●

3.1.16. Вектор $\bar{a}$ составляет с осями Ox и Oy углы $\alpha = 60^\circ$ и $\beta = 120^\circ$. Найти его координаты, если $|\bar{a}| = 2$.

◐ Пусть x, y, z — координаты вектора $\bar{a}$, т.е. $\bar{a} = (x; y; z)$. Координаты вектора $\bar{a}$ найдем из соотношений $\cos\alpha = \frac{x}{|\bar{a}|}$, $\cos\beta = \frac{y}{|\bar{a}|}$, $\cos\gamma = \frac{z}{|\bar{a}|}$. Предварительно найдем $\cos\gamma$. Так как $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, то $\cos^2\gamma = 1 - \cos^2 60^\circ - \cos^2 120^\circ$, т.е. $\cos^2\gamma = \frac{1}{2}$. Отсюда находим, что $\cos\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}$ или $\cos\gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Условию задачи удовлетворяют два вектора $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$: $\bar{a}_1$ с направляющими косинусами $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $\cos\beta = -\frac{1}{2}$, $\cos\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\bar{a}_2$ с направляющими косинусами $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $\cos\beta = -\frac{1}{2}$, $\cos\gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Имеем: $\frac{1}{2} = \frac{x_1}{2}$, $-\frac{1}{2} = \frac{y_1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{z_1}{2}$ и $\frac{1}{2} = \frac{x_2}{2}$, $-\frac{1}{2} = \frac{y_2}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{z_2}{2}$. Отсюда находим: $x_1 = 1$, $y_1 = -1$, $z_1 = \sqrt{2}$ и $x_2 = 1$, $y_2 = -1$, $z_2 = -\sqrt{2}$, т.е. $\bar{a}_1 = (1; -1; \sqrt{2})$ и $\bar{a}_2 = (1; -1; -\sqrt{2})$. ●

3.1.17. При каких значениях α и β векторы $\bar{a} = -2\bar{i} + 3\bar{j} + \alpha\bar{k}$ и $\bar{b} = \beta\bar{i} - 6\bar{j} + 2\bar{k}$ коллинеарны?

◐ Так как $\bar{a} \parallel \bar{b}$, то $-\frac{2}{\beta} = \frac{3}{-6} = \frac{\alpha}{2}$ (см. условие (1.3)). Отсюда находим, что $\alpha = -1$, $\beta = 4$. ●

3.1.18. Разложить вектор $\bar{c} = (9; 4)$ по векторам $\bar{a} = (1; 2)$ и $\bar{b} = (2; -3)$.

◐ Требуется представить вектор $\bar{c}$ в виде $\bar{c} = \lambda_1\bar{a} + \lambda_2\bar{b}$, где λ_1 и λ_2 — числа. Найдем их, используя определение равенства векторов. Имеем: $\bar{c} = 9\bar{i} + 4\bar{j}$, $\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j}$, $\bar{b} = 2\bar{i} - 3\bar{j}$ и равенство $9\bar{i} + 4\bar{j} = \lambda_1(\bar{i} + 2\bar{j}) + \lambda_2(2\bar{i} - 3\bar{j})$, т.е. $9\bar{i} + 4\bar{j} = (\lambda_1 + 2\lambda_2)\bar{i} + (2\lambda_1 - 3\lambda_2)\bar{j}$. Отсюда следует

$$\begin{cases} 9 = \lambda_1 + 2\lambda_2, \\ 4 = 2\lambda_1 - 3\lambda_2, \end{cases}$$

т.е. $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 2$. Следовательно, $\bar{c} = 5\bar{a} + 2\bar{b}$. ●

3.1.19. Дана сила $\bar{F} = (4; 4; -4\sqrt{2})$. Найти величину и направление силы $\bar{F}$.

◐ Величину силы $\bar{F}$ находим, используя формулу модуля вектора (1.1). Имеем

$$|\bar{F}| = \sqrt{4^2 + 4^2 + (-4\sqrt{2})^2} = 8.$$

Направляющие косинусы вектора $\bar{F}$ определяем по формулам (1.2): $\cos\alpha = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, $\cos\beta = \frac{1}{2}$, $\cos\gamma = \frac{-4\sqrt{2}}{8} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Итак, сила $F = 8$ действует в направлении вектора, образующего с координатными осями углы $\alpha = 60°$, $\beta = 60°$ и $\gamma = 135°$. ●

3.1.20. Доказать, что в любом треугольнике длины его сторон пропорциональны синусам противолежащих углов (теорема синусов).

◑ Рассмотрим треугольник ABC. Пусть $\overline{BA} = \bar{c}$, $\overline{BC} = \bar{a}$, $\overline{AC} = \bar{b}$. В плоскости треугольника ABC возьмем вспомогательную ось l, перпендикулярную, например, вектору $\bar{b}$ и спроектируем на эту ось векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ (рис. 6). Так как $\bar{b} = \bar{a} - \bar{c}$, то $\text{пр}_l\,\bar{b} = \text{пр}_l(\bar{a} - \bar{c})$, т. е. $\text{пр}_l(\bar{a} - \bar{c}) = 0$, ($\text{пр}_l\,\bar{b} = 0$, т. к. $\bar{b} \perp l$). Поэтому $\text{пр}_l\,\bar{a} - \text{пр}_l\,\bar{c} = 0$, т. е. $\text{пр}_l\,\bar{a} = \text{пр}_l\,\bar{c}$.

Но $\text{пр}_l\,\bar{a} = |\bar{a}| \cdot \cos(90° - C) = |\bar{a}| \cdot \sin C$, а $\text{пр}_l\,\bar{c} = |\bar{c}| \times \times \cos(90° - A) = |\bar{c}| \cdot \sin A$. Поэтому $|\bar{a}| \cdot \sin C = |\bar{c}| \cdot \sin A$ или

$$\frac{|\bar{a}|}{\sin A} = \frac{|\bar{c}|}{\sin C}.$$

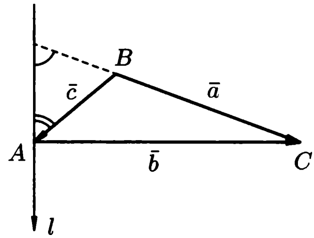

Рис. 6

Выбрав ось перпендикулярную, например, вектору $\bar{c}$, аналогично получим:

$$\frac{|\bar{a}|}{\sin A} = \frac{|\bar{b}|}{\sin B}.$$

Из двух последних равенств следует, что

$$\frac{|\bar{a}|}{\sin A} = \frac{|\bar{b}|}{\sin B} = \frac{|\bar{c}|}{\sin C}.$$ ●

3.1.21. Найти координаты вектора $\bar{a}$, если $|\bar{a}| = 3$ и углы между вектором и координатными осями равны: $\alpha = \beta = \gamma$.

3.1.22. Луч образует с двумя осями координат углы в $60°$. Под каким углом наклонен он к третьей оси?

3.1.23. Даны векторы $\bar{a} = (2; 3)$, $\bar{b}(1; -3)$, $\bar{c}(-1; 3)$. При каком значении коэффициента α векторы $\bar{p} = \bar{a} + \alpha\bar{b}$ и $\bar{q} = \bar{a} + 2\bar{c}$ коллинеарны?

3.1.24. Даны точки $A(-1; 5; -10)$, $B(5; -7; 8)$, $C(2; 2; -7)$, $D(5; -4; 2)$. Проверить, что векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ коллинеарны; установить, какой из них длиннее и во сколько раз; направлены они в одну сторону или в разные?

3.1.25. Представить вектор $\bar{d} = (4; 12; -3)$ как линейную комбинацию векторов $\bar{a} = (2; 3; 1)$, $\bar{b} = (5; 7; 0)$ и $\bar{c} = (3; -2; 4)$.

3.1.26. На оси Oy найти точку M, равноудаленную от точек $A(1; -4; 7)$ и $B(5; 6; -5)$.

3.1.27. На оси Ox найти точку M, расстояние которой от точки $A(3; -3)$ равно 5.

3.1.28. Даны вершины треугольника $A(3; -1; 5)$, $B(4; 2; -5)$, $C(-4; 0; 3)$. Найти длину медианы, проведенной из вершины A.

7 – 2361

Дополнительные задачи

3.1.29. Дано разложение вектора $\bar{c}$ по базису $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$: $\bar{c} = 16\bar{i} - 15\bar{j} + 12\bar{k}$. Найти разложение по этому же базису вектора $\bar{d}$, параллельного вектору $\bar{c}$ и противоположного с ним направления, при условии, что $|\bar{d}| = 75$.

3.1.30. Пусть векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ неколлинеарны и $\overline{AB} = \frac{\alpha}{2}\bar{a}$, $\overline{BC} = 4(\beta\bar{a} - \bar{b})$, $\overline{CD} = -4\beta\bar{b}$, $\overline{DA} = \bar{a} + \alpha\bar{b}$. Найти α и β и доказать коллинеарность векторов $\overline{BC}$ и $\overline{DA}$.

3.1.31. Даны четыре точки A, B, C, D. Точки M и N — середины отрезков AC и BD. Доказать, что $\overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{CB})$.

3.1.32. $ABCDEF$ — правильный шестиугольник, $\overline{AB} = \bar{p}$, $\overline{BC} = \bar{q}$. Выразить через $\bar{p}$ и $\bar{q}$ векторы $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FA}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$.

3.1.33. Доказать, что средняя линия треугольника параллельна его основанию и длина ее равна половине длины основания.

3.1.34. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол $\varphi = 60°$, при этом $|\bar{a}| = 5$, $|\bar{b}| = 8$. Найти $|\bar{a} + \bar{b}|$ и $|\bar{a} - \bar{b}|$.

3.1.35. В равнобедренной трапеции $OACB$ величина угла $BOA = 60°$, $|\overline{OB}| = |\overline{BC}| = |\overline{CA}| = 2$, точки M и N — середины сторон BC и AC. Выразить векторы $\overline{AC}$, $\overline{OM}$, $\overline{ON}$, $\overline{MN}$ через $\bar{m}$ и $\bar{n}$ — единичные векторы направлений $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$.

3.1.36. Дано: $\overline{AB} = \bar{a} + 2\bar{b}$, $\overline{BC} = -4\bar{a} - \bar{b}$, $\overline{CD} = -5\bar{a} - 3\bar{b}$. Доказать, что $ABCD$ — трапеция.

3.1.37. Найти сумму векторов, соединяющих центр правильного треугольника с его вершинами.

3.1.38. На плоскости Oxy построить векторы $\overline{OA} = \bar{a} = 2\bar{i}$, $\overline{OB} = \bar{b} = 3\bar{i} + 3\bar{j}$, $\overline{OC} = \bar{c} = 2\bar{i} + 6\bar{j}$. Разложить вектор $\bar{c}$ по векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

3.1.39. Дан вектор $\bar{c} = 4\bar{i} + 7\bar{j} - 4\bar{k}$. Найти вектор $\bar{d}$, параллельный вектору $\bar{c}$ и противоположного с ним направления, если $|\bar{d}| = 27$.

3.1.40. Найти вектор $\bar{x}$, коллинеарный вектору $\bar{a} = \bar{i} - 2\bar{j} - 2\bar{k}$, образующий с ортом $\bar{j}$ острый угол и имеющий длину $|\bar{x}| = 15$.

3.1.41. Заданы векторы $\bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j}$, $\bar{b} = -3\bar{j} - 2\bar{k}$, $\bar{c} = \bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$. Найти:

1) координаты орта $\bar{a}^0$;

2) координаты вектора $\bar{a} - \frac{1}{2}\bar{b} + \bar{c}$;

3) разложение вектора $\bar{a} + \bar{b} - 2\bar{c}$ по базису $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$;

4) $\text{пр}_{\bar{j}}(\bar{a} - \bar{b})$.

3.1.42. Зная радиус-векторы $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$, $\bar{r}_3$ трех последовательных вершин параллелограмма, найти радиус-вектор его четвертой вершины.

3.1.43. Даны радиус-векторы вершин треугольника ABC: $\bar{r}_A = \bar{i}+2\bar{j}+3\bar{k}$, $\bar{r}_B = 3\bar{i}+2\bar{j}+\bar{k}$, $\bar{r}_C = \bar{i}+4\bar{j}+\bar{k}$. Показать, что треугольник ABC равносторонний.

3.1.44. Радиус-вектор точки M составляет с осью Oy угол $60°$, а с осью Oz угол $45°$; его длина $|\bar{r}| = 8$. Найти координаты точки M, если ее абсцисса отрицательна.

3.1.45. Три вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ попарно перпендикулярны, а длины их соответственно равны 2, 3 и 6. Найти длину суммы S этих векторов и направляющие косинусы вектора $\bar{S}$.

3.1.46. Три силы $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, $\bar{F}_3$ приложены к одной точке, имеют взаимно перпендикулярные направления. Найти величину их равнодействующей $\bar{F}$, если известны величины сил: $|\bar{F}_1| = 2$, $|\bar{F}_2| = 10$, $|\bar{F}_3| = 11$.

3.1.47. Найти равнодействующую силу $\bar{R}$ сил $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$, а также углы α и β, составляемые силой $\bar{R}$ с силами $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$, если $|\bar{F}_1| = 15$, $|\bar{F}_2| = 10$; угол между силами $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$ равен $45°$.

3.1.48. Найти направление и скорость ветра, являющегося результатом взаимного действия морского бриза, дующего со скоростью 14 м/с на берег и ветра, дующего с берега на море со скоростью 9 м/с и под углом в $60°$ к береговой линии.

Контрольные вопросы и более сложные задачи

3.1.49. К двум тросам подвешен груз массой 30 т так, как это показано на рис. 7. Определить силы, возникающие в тросах, если $\angle ACB = 120°$.

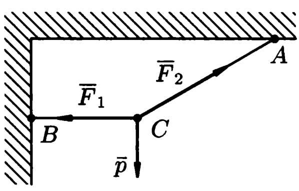

Рис. 7

3.1.50. Точка M, лежащая на отрезке AB, делит его в отношении $m : n$, т.е. $AM : MB = m : n$; O — произвольная точка пространства. Выразить вектор $\overline{OM}$ через векторы $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$.

3.1.51. M — точка пересечения медиан треугольника ABC, O — произвольная точка пространства. Доказать равенство $\overline{OM} = \frac{1}{3} \cdot (\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})$.

3.1.52. Доказать, что для любых заданных векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ векторы $\bar{a}+\bar{b}$, $\bar{b}+\bar{c}$, $\bar{c}-\bar{a}$ компланарны.

3.1.53. Даны три некомпланарных вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$. При каком значении λ векторы $\lambda\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$, $\bar{a}+\lambda\bar{b}+\bar{c}$, $\bar{a}+\bar{b}+\lambda\bar{c}$ компланарны?

3.1.54. Разложить вектор $\bar{S}=\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$ по трем некомпланарным векторам $\bar{m}=\bar{a}+\bar{b}-2\bar{c}$, $\bar{n}=\bar{a}-\bar{b}$, $\bar{p}=2\bar{b}+3\bar{c}$.

3.1.55. В треугольнике ABC прямая AM является биссектрисой угла BAC, причем точка M лежит на стороне BC. Найти $\overline{AM}$, если $\overline{AB}=\bar{b}$, $\overline{AC}=\bar{c}$, $|\bar{b}|=2$, $|\bar{c}|=1$.

3.1.56. Найти вектор $\bar{x}$, направленный по биссектрисе угла между векторами $\bar{a}=7\bar{i}-4\bar{j}-4\bar{k}$ и $\bar{b}=-2\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k}$, если $|\bar{x}|=5\sqrt{6}$.
Указание. $\bar{x}=\lambda\cdot(\bar{b}^0+\bar{a}^0)$.

3.1.57. Какому условию удовлетворяют векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если:
1) $|\bar{a}+\bar{b}|>|\bar{a}-\bar{b}|$;
2) $|\bar{a}+\bar{b}|<|\bar{a}-\bar{b}|$;
3) $|\bar{a}+\bar{b}|=|\bar{a}|+|\bar{b}|$;
4) $|\bar{a}+\bar{b}|=|\bar{a}|-|\bar{b}|$?

3.1.58. Изменится ли сумма компланарных векторов, если все слагаемые векторы будут повернуты в одном и том же направлении на один и тот же угол?

3.1.59. Дать геометрическое построение разложения вектора $\bar{a}$ на два компланарных с ним слагаемых, если известны: а) длина и направление одного слагаемого; б) направление обоих слагаемых; в) направление одного и длина другого слагаемого. (Исследовать, когда разложение возможно, сколько имеет решений, если ни одно из слагаемых не параллельно $\bar{a}$.)

3.1.60. В разложении вектора $\bar{c}=\lambda_1\cdot\bar{a}+\lambda_2\cdot\bar{b}$ по двум неколлинеарным векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$ могут ли оба коэффициента λ_1 и λ_2 или один из них равняться нулю?

3.1.61. Могут ли векторы $\bar{a}=(-2;1;-2)$, $\bar{b}=(-2;-4;4)$, $\bar{c}=(4;3;-2)$ быть сторонами треугольника?

3.1.62. Коллинеарны ли векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если коллинеарны векторы $\bar{a}+\bar{b}$ и $\bar{a}-\bar{b}$?

3.1.63. Может ли вектор составлять с координатными осями углы 30°, 120°, 60°?

3.1.64. Следует ли из равенства $\overline{AB}=\overline{DC}$ равенство $\overline{AD}=\overline{BC}$?

3.1.65. Может ли угол между векторами равняться: 0°; 45°; 180°; 270°?

3.1.66. Как следует направить векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, чтобы длина вектора $\bar{a}+\bar{b}$ была наибольшей? наименьшей?

3.1.67. Каково взаимное расположение точек A, B, C, если:
1) векторы $\overline{AC}$ и $\overline{AB}$ коллинеарны;
2) $\overline{AC}=\overline{CB}$;
3) $\overline{AC}=-\frac{1}{3}\overline{CA}$?

3.1.68. Какому условию должны удовлетворять векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ пространства, чтобы из них можно было образовать треугольник?