§ 2. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

⇛ *Скалярным произведением* двух ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними (см. рис. 8). Обозначение: $\bar{a} \cdot \bar{b}$.

Таким образом,

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\varphi. \tag{2.1}$$

По определению $\bar{a} \cdot \bar{0} = \bar{0} \cdot \bar{a} = 0$.

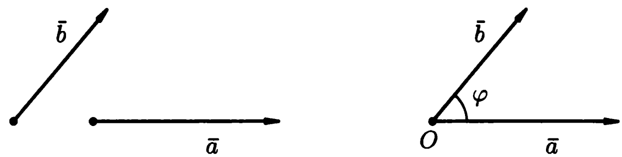

Рис. 8

Формулу (2.1) можно записать в виде

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot \text{пр}_{\bar{a}} \bar{b} \quad \text{или} \quad \bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{b}| \cdot \text{пр}_{\bar{b}} \bar{a}. \tag{2.2}$$

Свойства скалярного произведения:

1. $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$ (перестановочность);
2. $\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}$ (распределительность);
3. $(\lambda\bar{a}) \cdot \bar{b} = \lambda(\bar{a} \cdot \bar{b})$ (сочетательность по отношению к скалярному множителю);
4. $\bar{a}^2 = |\bar{a}|^2$ (скалярный квадрат вектора $\bar{a}$ равен квадрату его модуля);
5. $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0 \iff \bar{a} \perp \bar{b}$ (или $\bar{a} = 0$, или $\bar{b} = 0$). В частности: $\bar{i} \cdot \bar{j} = \bar{j} \cdot \bar{k} = \bar{k} \cdot \bar{i} = 0$.

⇛ Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, скалярное произведение которых равно нулю, называются *ортогональными*.

Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы своими координатами $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $\bar{b} = (b_x; b_y; b_z)$, то

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{2.3}$$

3.2.1. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{2}{3}\pi$. Зная, что $|\bar{a}| = 10$ и $|\bar{b}| = 2$, вычислить $(\bar{a} + 2\bar{b}) \cdot (3\bar{a} - \bar{b})$.

◔ Согласно свойствам скалярного произведения

$$(\bar{a} + 2\bar{b}) \cdot (3\bar{a} - \bar{b}) = 3\bar{a}^2 + 5\bar{a}\bar{b} - 2\bar{b}^2 =$$
$$= 3|\bar{a}|^2 + 5|\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cos(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) - 2|\bar{b}|^2 =$$
$$= 3 \cdot 100 + 5 \cdot 10 \cdot 2 \cos\frac{2}{3}\pi - 2 \cdot 4 = 300 - 50 - 8 = 242.$$ ●

3.2.2. Дано: $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 1$, $\varphi = (\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = \frac{\pi}{3}$. Найти модуль вектора $\bar{c} = 2\bar{a} - 3\bar{b}$.

3.2.3. Дано: $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 4$, $\varphi = (\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = 120°$. Найти модуль вектора $\bar{c} = 3\bar{a} + 2\bar{b}$.

3.2.4. Выразить длины медиан произвольного треугольника через длины его сторон.

◔ Рассмотрим треугольник ABC. Пусть AD — одна из медиан треугольника (рис. 9). Введем в рассмотрение векторы $\overline{AB} = \bar{c}$, $\overline{AC} = \bar{b}$ и $\overline{AD} = \bar{m}$. Тогда $\bar{m} = \frac{1}{2}(\bar{b} + \bar{c})$. Возведем обе части равенства в квадрат: $\bar{m}^2 = \frac{1}{4}(\bar{b}^2 + 2\bar{b}\cdot\bar{c} + \bar{c}^2)$, т. е. $|\bar{m}|^2 = \frac{1}{4}(|\bar{b}|^2 + |\bar{c}|^2 + 2\bar{b}\cdot\bar{c})$. А так как $\bar{a} = \overline{BC} = \bar{b} - \bar{c}$, то $|\bar{a}|^2 = |\bar{b}|^2 - 2\bar{b}\cdot\bar{c} + |\bar{c}|^2$. Значит $2\bar{b}\bar{c} = |\bar{b}|^2 + |\bar{c}|^2 - |\bar{a}|^2$. В итоге получаем $|\bar{m}|^2 = \frac{1}{4}(|\bar{b}|^2 + |\bar{c}|^2 + |\bar{b}|^2 + |\bar{c}|^2 - |\bar{a}|^2) = \frac{1}{4}(2|\bar{b}|^2 + 2|\bar{c}|^2 - |\bar{a}|^2)$ и далее $|\bar{m}| = \frac{1}{2}\sqrt{2|\bar{b}|^2 + 2|\bar{c}|^2 - |\bar{a}|^2}$. ●

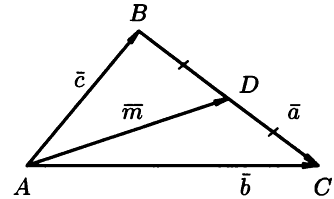

Рис. 9

3.2.5. Проверить, могут ли векторы $\bar{a} = 7\bar{i} + 6\bar{j} - 6\bar{k}$, $\bar{b} = 6\bar{i} + 2\bar{j} + 9\bar{k}$ быть ребрами куба. Найти третье ребро куба.

◔ Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ можно принять за ребра куба, если они ортогональны и имеют равные длины. Проверим это: $\bar{a}\cdot\bar{b} = 7\cdot 6 + 6\cdot 2 - 6\cdot 9 = 42 + 12 - 54 = 0$, значит $\bar{a} \perp \bar{b}$; $|\bar{a}| = \sqrt{49 + 36 + 36} = 11$, $|\bar{b}| = \sqrt{36 + 4 + 81} = 11$, значит $|\bar{a}| = |\bar{b}|$.

Найдем третье ребро $\bar{c} = (x; y; z)$ куба. Так как $\bar{a} \perp \bar{c}$, то $\bar{a}\cdot\bar{c} = 0$, т. е. $7x + 6y - 6z = 0$; так как $\bar{b} \perp \bar{c}$, то $\bar{b}\cdot\bar{c} = 0$, т. е. $6x + 2y + 9z = 0$; из равенств $|\bar{c}| = |\bar{a}| = |\bar{b}| = 11$ вытекает, что $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 11$. Для нахождения координат вектора $\bar{c}$ решим систему уравнений

$$\begin{cases} 7x + 6y - 6z = 0, \\ 6x + 2y + 9z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 121. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений выражаем x и y через z $\left(x = -3z,\ y = \frac{9}{2}z\right)$ и подставляем их значения в третье уравнение системы: $9z^2 + \frac{81}{4}z^2 + z^2 = 121$. Отсюда находим, что $z_1 = -2$, $z_2 = 2$. Тогда $x_1 = 6$, $x_2 = -6$ и $y_1 = -9$, $y_2 = 9$. Таким образом, $\bar{c} = \pm(6\bar{i} - 9\bar{j} - 2\bar{k})$. ●

3.2.6. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j}$ и $\bar{b} = -\bar{j} + 2\bar{k}$.

3.2.7. Найти вектор $\bar{x}$, зная, что $\bar{x} \perp \bar{a}$, $\bar{a}=(1;0;1)$, $\bar{x} \perp \bar{b}$, $\bar{b}=(0;2;-1)$, проекция вектора $\bar{x}$ на вектор $\bar{c} = (1;2;2)$ равна 1.

3.2.8. Даны вершины треугольника $A(2;3;-1)$, $B(4;1;-2)$ и $C(1;0;2)$. Найти:

а) внутренний угол при вершине C;

б) $\text{пр}_{\overline{CA}}\,\overline{CB}$.

◯ а) Угол φ при вершине C есть угол между векторами $\overline{CB}$ и $\overline{CA}$. Определим координаты этих векторов:

$$\overline{CB} = (4-1; 1-0; -2-2) = (3;1;-4),$$
$$\overline{CA} = (2-1; 3-0; -1-2) = (1;3;-3).$$

Найдем их модули:

$$|\overline{CB}| = \sqrt{9+1+16} = \sqrt{26}, \quad |\overline{CA}| = \sqrt{1+9+9} = \sqrt{19}.$$

Согласно формуле (2.1)

$$\cos\varphi = \frac{\overline{CB}\cdot\overline{CA}}{|\overline{CB}|\cdot|\overline{CA}|} = \frac{3\cdot 1 + 1\cdot 3 + (-4)\cdot(-3)}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{19}} = \frac{18}{\sqrt{494}},$$
$$\varphi = \arccos\frac{18}{\sqrt{494}}.$$

б) Согласно формуле (2.2)

$$\text{пр}_{\overline{CA}}\,\overline{CB} = \frac{\overline{CB}\cdot\overline{CA}}{|\overline{CA}|} = \frac{18}{\sqrt{19}}.$$ ●

3.2.9. Даны векторы $\bar{a} = (3;-6;-1)$, $\bar{b} = (1;4;-5)$, $\bar{c} = (3;-4;12)$. Найти $\text{пр}_{\bar{c}}(\bar{a}+\bar{b})$.

3.2.10. Даны некомпланарные векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, причем $|\bar{a}| = |\bar{b}| = 1$, $|\bar{c}| = 4$, $\bar{a} \perp \bar{b}$, $(\widehat{\bar{c},\bar{a}}) = (\widehat{\bar{c},\bar{b}}) = 60^\circ$. Найти

а) $(\bar{a} - 2\bar{b})\cdot(\bar{c} - \bar{a})$;

б) $(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})^2$.

3.2.11. Даны векторы $\bar{a} = (1;-3;4)$, $\bar{b} = (3;-4;2)$, $\bar{c} = (-1;1;4)$. Найти $\text{пр}_{\bar{b}+\bar{c}}\,\bar{a}$.

3.2.12. В треугольнике ABC: $\overline{AB} = \bar{b}$, $\overline{AC} = \bar{c}$. Выразить вектор $\bar{h}$, направленный по высоте AH, через векторы $\bar{b}$ и $\bar{c}$.

◯ Имеем (рис. 10): $\bar{h} = \bar{b} + \overline{BH}$. Но $\overline{BH} \parallel \overline{BC}$, где $\overline{BC} = \bar{c} - \bar{b}$. Поэтому $\overline{BH}=\lambda(\bar{c}-\bar{b})$ и $\bar{h}=\bar{b}+\lambda(\bar{c}-\bar{b})$. Множитель λ найдем из условия $\overline{AH} \perp \overline{BC}$. Значит $\overline{AH}\cdot\overline{BC} = 0$,

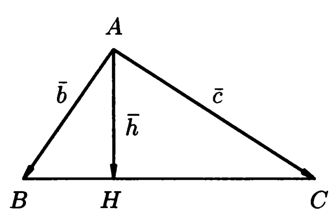

Рис. 10

т. е. $(\bar{b}+\lambda(\bar{c}-\bar{b}))\cdot(\bar{c}-\bar{b})=0$. Получаем $\bar{b}\cdot(\bar{c}-\bar{b})+\lambda\cdot(\bar{c}-\bar{b})^2=0$, откуда находим $\lambda=-\dfrac{\bar{b}\cdot(\bar{c}-\bar{b})}{|\bar{c}-\bar{b}|^2}$. Найденное значение λ подставляем в выражение для вектора $\bar{h}$:

$$\bar{h}=\bar{b}+\frac{\bar{b}\cdot(\bar{b}-\bar{c})}{|\bar{c}-\bar{b}|^2}\cdot(\bar{c}-\bar{b}).$$ ●

3.2.13. Единичные векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ удовлетворяют условию $\bar{e}_1+\bar{e}_2+\bar{e}_3=\bar{0}$. Найти $\bar{e}_1\cdot\bar{e}_2+\bar{e}_2\cdot\bar{e}_3+\bar{e}_3\cdot\bar{e}_1$.

3.2.14. Дано: $|\bar{a}|=3$, $|\bar{b}|=2$, $|\bar{c}|=5$, $(\widehat{\bar{a},\bar{b}})=(\widehat{\bar{b},\bar{c}})=\frac{\pi}{3}$, векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ — компланарны. Найти модуль вектора $\bar{d}=\bar{a}+\bar{b}-\bar{c}$.

3.2.15. Найти вектор $\bar{x}$, зная, что он перпендикулярен к оси Oz и удовлетворяет условиям $\bar{x}\cdot\bar{a}=9$, $\bar{x}\cdot\bar{b}=-4$, где $\bar{a}=(3;-1;5)$, $\bar{b}=(1;2;-3)$.

Дополнительные задачи

3.2.16. Показать, что четырехугольник с вершинами $A(-5;3;4)$, $B(-1;-7;5)$, $C(6;-5;-3)$ и $D(2;5;-4)$ есть квадрат.

3.2.17. Доказать, что вектор $\bar{d}=\bar{c}\cdot(\bar{b}\cdot\bar{a})-\bar{a}\cdot(\bar{b}\cdot\bar{c})$ перпендикулярен вектору $\bar{b}$.

3.2.18. Найти вектор $\bar{b}$, коллинеарный вектору $\bar{a}=\bar{i}+2\bar{j}-3\bar{k}$ и удовлетворяющий условию $\bar{b}\cdot\bar{a}=28$.

3.2.19. Дано: $\bar{a}=4\bar{i}-\bar{j}-2\bar{k}$, $\bar{b}=(2;1;2)$. Найти:

а) $\bar{a}\cdot\bar{b}$;

б) $(\widehat{\bar{a},\bar{b}})$;

в) $\text{пр}_{\bar{a}}\,\bar{b}$;

г) $\text{пр}_{\bar{b}}\,\bar{a}$.

3.2.20. Какую работу производит сила $\bar{F}=(2;-1;-4)$, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из точки $A(1;-2;3)$ в точку $B(5;-6;1)$.

3.2.21. Найти работу равнодействующей сил $\bar{F}_1=\bar{i}-\bar{j}+\bar{k}$ и $\bar{F}_2=2\bar{i}+\bar{j}+3\bar{k}$ при перемещении ее точки приложения из начала координат в точку $M(2;-1;-1)$.

3.2.22. При каком значении λ векторы $\bar{b}=\lambda\bar{i}-5\bar{j}+3\bar{k}$ и $\bar{c}=\bar{i}+2\bar{j}-\lambda\bar{k}$ взаимно перпендикулярны?

3.2.23. В треугольнике ABC вершины имеют координаты $A(1;1;-1)$, $B(2;3;1)$, $C(3;2;1)$. Найти:

а) длины сторон;

б) внутренние углы;

в) острый угол между медианой BD и стороной AC.

3.2.24. Найти углы между осями координат и радиус-вектором точки $M(-2;3;1)$.

3.2.25. Доказать, что длины векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равны, если векторы $\bar{a}+\bar{b}$ и $\bar{a}-\bar{b}$ перпендикулярны.

3.2.26. Найти проекцию вектора $\bar{a} = (\sqrt{2}; -3; -5)$ на ось, составляющую с координатными осями Ox и Oz углы $\alpha = 45°$ и $\gamma = 60°$, а с осью Oy — острый угол β.

3.2.27. Даны точки $A(3;4;-2)$ и $B(2;5;-2)$. Найти проекцию вектора $\overline{AB}$ на ось, составляющую с осями Ox и Oy углы $\alpha = 60°$ и $\beta = 120°$, а с осью Oz — тупой угол γ.

3.2.28. Векторы $\overline{AB} = 2\bar{a} - 6\bar{b}$, $\overline{BC} = \bar{a} + 7\bar{b}$, $\overline{CA} = -3\bar{a} - \bar{b}$ образуют треугольник ABC; векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ — взаимно перпендикулярные орты. Найти углы треугольника ABC.

3.2.29. Зная, что $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c} = 0$, $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 1$, $|\bar{c}| = 4$, вычислить $\bar{a}\cdot\bar{b} + \bar{b}\cdot\bar{c} + \bar{c}\cdot\bar{a}$.

3.2.30. Найти угол между биссектрисами углов Oxy и Oyz.

3.2.31. Какой угол образуют единичные векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если известно, что векторы $\bar{m} = \bar{a}+2\bar{b}$ и $\bar{n} = 5\bar{a}-4\bar{b}$ взаимно перпендикулярны.

3.2.32. Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ имеют равные длины и попарно образуют равные углы. Найти координаты вектора $\bar{c}$, если $\bar{a} = (1;1;0)$, $\bar{b} = (0;1;-1)$.

3.2.33. Доказать, что точки $A(-3;-7;-5)$, $B(0;-1;-2)$ и $C(2;3;0)$ лежат на одной прямой, причем точка B расположена между точками A и C.

3.2.34. Даны радиус-векторы трех последовательных вершин параллелограмма $ABCD$: $\bar{r}_A = 2\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$, $\bar{r}_B = \bar{i} + 3\bar{j} + 5\bar{k}$, $\bar{r}_C = 7\bar{i} + 9\bar{j} + 11\bar{k}$. Определить радиус-вектор четвертой вершины D.

3.2.35. К вершине куба приложены три силы, равные по величине 1, 2, 3 и направленные по диагонали граней куба, проходящим через эту вершину. Найти величину равнодействующей этих трех сил.

Контрольные вопросы и более сложные задачи

3.2.36. Доказать, что для любых четырех точек A, B, C и D пространства имеет место равенство $\overline{AB}\cdot\overline{CD} + \overline{AC}\cdot\overline{DB} + \overline{BC}\cdot\overline{AD} = 0$.

3.2.37. Определить геометрическое место концов переменного вектора $\bar{x}$, если его начало находится в точке А и вектор $\bar{x}$ удовлетворяет условию $\bar{x}\cdot\bar{a} = \alpha$, где $\bar{a}$ — данный вектор и α — данное число.

3.2.38. Найти угол между биссектрисами двух плоских углов правильного тетраэдра, проведенными из одной его вершины.

3.2.39. В треугольной пирамиде $ABCS$: $AB \perp CS$, $AC \perp BS$. Доказать, что ребра AS и BC также перпендикулярны.