которой сумма квадратов расстояний до его вершин будет наименьшей.

§15. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

Пусть требуется исследовать на экстремум функцию $z=f(x, y)$ при условии, что сами переменные x и y связаны уравнением $\varphi(x, y)=0$. Геометрически это означает, что, кроме функции $z=f(x, y)$, задана еще некоторая линия L в плоскости xOy и требуется функцию z исследовать на экстремум при условии, что экстремальные точки могут принадлежать только этой линии L. Эти точки называются точками условного экстремума, а уравнение, связывающее переменные x и y, — уравнением связи.

Если из уравнения связи $\varphi(x, y)=0$ переменную y выразить явно через x и подставить в заданную функцию $z=f(x, y)$, то получим функцию от одной переменной x. Найдя те значения x, при которых z достигает экстремума, мы подставим их в уравнение связи и определим соответствующие значения y. В результате будут получены точки условного экстремума. В тех случаях, когда y нельзя выразить явно через x, то применяют так называемый метод множителей Лагранжа, сущность которого состоит в следующем.

Чтобы данную функцию $z=f(x, y)$ исследовать на экстремум при условии, что $\varphi(x, y)=0$, надо:

1) составить вспомогательную функцию Лагранжа

$$F(x, y, \lambda)=f(x, y)+\lambda\cdot\varphi(x, y), \tag{1}$$

где λ — вспомогательная неизвестная;

2) найти частные производные $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial \lambda}$, приравнять каждую из них нулю и решить полученную систему трех уравнений с тремя неизвестными x, y и λ.

В результате решения системы будут получены точки, в которых функция может иметь условный экстремум, но может и не иметь его в найденных точках, так как система выражает только необходимое условие условного экстремума.

128. Исследовать на экстремум функцию $z=x^2+6x-2y+1$ при условии, что переменные x и y связаны уравнением $x^2+y-4=0$.

Решение. Уравнение связи представляет параболу $y=4-x^2$. Заменив в заданной функции z переменную y через $4-x^2$, получим

$$z(x)=x^2+6x-2(4-x^2)+1$$

или

$$z(x)=3x^2+6x-7.$$

Полученную функцию $z(x)$ исследуем на экстремум. $\frac{dz}{dx}=6x+6$; $6x+6=0$; $x_0=-1$ — стационарная точка функции $z(x)$. Находим вторую производную: $\frac{d^2z}{\partial x^2}=6$.

Так как вторая производная положительна, то в найденной стационарной точке функция $z(x)$ имеет минимум. Подставив $x_0=-1$ в уравнение связи, получим $y_0=4-1=3$. Следовательно, точка $P_0(-1;\ 3)$ — точка условного экстремума. В этой точке функция $z(x,\ y)$ имеет минимум.

$$z_{\min}=z(-1;\ 3)=1-6-6+1=-10.$$

Определим теперь точку условного экстремума, пользуясь методом множителей Лагранжа.

1) Составим вспомогательную функцию Лагранжа. Так как по условию $f(x,\ y)=x^2+6x-2y+1$ и $\varphi(x,\ y)=x^2+y-4$, то

$$F(x,\ y,\ \lambda)=x^2+6x-2y+1+\lambda\cdot(x^2+y-4).$$

2) Находим частные производные $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial \lambda}$.

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x+6+2\lambda x;\quad \frac{\partial F}{\partial y}=-2+\lambda;\quad \frac{\partial F}{\partial \lambda}=x^2+y-4.$$

3) Приравняв каждую частную производную нулю, получаем систему:

$$\begin{cases} 2x+6+2\lambda x=0, \\ -2+\lambda=0, \\ x^2+y-4=0. \end{cases}$$

Из второго уравнения $\lambda=2$, тогда из первого следует $x=-1$, а из третьего $y=3$. Таким образом, $P_0=(-1;\ 3)$ — точка условного экстремума.

Метод множителей Лагранжа может быть использован при исследовании функции трех переменных на условный экстремум.

Пусть задана функция трех переменных $u=f(x, y, z)$, где переменные x, y, z связаны между собой уравнением $\varphi(x, y, z)=0$. В этом случае вспомогательная функция Лагранжа имеет вид:

$$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z+\lambda \cdot \varphi(x, y, z). \qquad (2)$$

Переменные x, y и z могут быть связаны двумя уравнениями связи: $\varphi_1(x, y, z)=0$ и $\varphi_2(x, y, z)=0$. Тогда функция Лагранжа имеет вид:

$$F(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2)=f(x, y, z)+\lambda_1 \cdot \varphi_1(x, y, z)+\lambda_2 \cdot \varphi_2(x, y, z). \qquad (3)$$

129. Найти прямоугольный параллелепипед наибольшего объема, если его полная поверхность равна S.

Решение. Обозначим стороны параллелепипеда через x, y, z. По условию задачи требуется найти наибольшее значение функции $V=f(x, y, z)=x \cdot y \cdot z$ при условии, что переменные x, y, z связаны соотношением $2\ (xy+yz+zx)=S$ или уравнением связи $\varphi(x, y, z)=2(xy+xz+yz)-S=0$.

Пользуясь (2), составляем функцию Лагранжа:

$$F(x, y, z, \lambda) = xyz+\lambda \cdot [2(xy+xz+yz)-S].$$

Находим частные производные $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$, $\frac{\partial F}{\partial \lambda}$, приравниваем каждую нулю и решаем полученную систему четырех уравнений с неизвестными x, y, z и λ.

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}=yz+2\lambda(y+z)=0, \\ \frac{\partial F}{\partial y}=xy+2\lambda(x+z)=0, \\ \frac{\partial F}{\partial z}=xy+2\lambda(x+y)=0, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}=2(xy+xz+yz)-S=0. \end{cases}$$

Из первых трех уравнений следует, что $x=y=z$.

Тогда из четвертого уравнения системы получаем

$$x=y=z=\sqrt{\frac{S}{6}}.$$

Таким образом, точка $M_0\left(\sqrt{\frac{S}{6}}, \sqrt{\frac{S}{6}}, \sqrt{\frac{S}{6}}\right)$ — точка условного экстремума. Как видно, искомый параллелепипед есть куб со стороной $\sqrt{\frac{S}{6}}$.

130. Исследовать на экстремум функцию $z=2x^2+y^2$ при условии, что переменные x и y связаны уравнением $x+y-2=0$.

131. Цилиндр вписан в шар радиуса R. Найти размеры цилиндра, имеющего при этом наибольший объем.

132. Исследовать на экстремум функцию $u=x^2+y^2+z^2$ при условии, что переменные связаны соотношениями

$$x^2-y+z^2=0 \text{ и } 2x-y+z=0.$$

Решение. Так как переменные связаны двумя уравнениями связи, то составляем функцию Лангранжа по формуле (3).

$$F(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2)=x^2+y^2+z^2+\lambda_1(x^2-y+z^2)+\lambda_2(2x-y+z),$$

где λ_1 и λ_2 — неизвестные величины.

Находим частные производные, приравниваем их нулю и решаем полученную систему уравнений относительно неизвестных x, y, z, λ_1 и λ_2.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}=2x+2\lambda_1 x+2\lambda_2=0, & (1)\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=2y-\lambda_1-\lambda_2=0, & (2)\\ \dfrac{\partial F}{\partial z}=2z+2\lambda_1 z+\lambda_2=0, & (3)\\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_1}=x^2-y+z^2=0, & (4)\\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_2}=2x-y+z=0. & (5)\end{cases}$$

Из уравнения (1) $x=-\frac{\lambda_2}{1+\lambda_1}$, а из уравнения (3) $z=-\frac{\lambda_2}{2(1+\lambda_1)}$, откуда следует, что $x=2z$; тогда из (5) получаем, что $y=5z$. Подставив в (4) $x=2z$ и $y=5z$, получаем $4z^2-5z+z^2=0$ или $5z(z-1)=0$; $z_1=0$; $z_2=1$; тогда соответственно $x_1=0$; $y_1=0$; $x_2=2$; $y_2=5$.

Таким образом, получили две точки условного экстремума: $M_1(0, 0, 0)$ и $M_2(2, 5, 1)$. В первой точке функция u имеет минимум, а во второй — максимум.

$$u_{min}=u\ (0, 0, 0)=0;\ u_{max}=u\ (2, 5, 1)=4+25+1=30.$$

Функция имеет минимум в начале координат, а максимум в точке $M_2(2, 5, 1)$, которая принадлежит и параболоиду вращению $y=x^2+z^2$ и плоскости $2x-y+z=0$.

§15-а. ПОДБОР ПАРАМЕТРОВ КРИВЫХ ПО СПОСОБУ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Пусть в результате опыта зависимость между переменными x и y выражена в виде таблицы:

x	x_1	x_2	x_3	x_i		x_n
y	y_1	y_2	y_3	y_i		y_n

В системе координат xOy построим точки $M_1(x_1;\ y_1)$, $M_2(x_2;\ y_2)$, $M_3(x_3;\ y_3)$ ... $M_i(x_i;\ y_i)$ ... $M_n(x_n;\ y_n)$ (рис. 8-а).

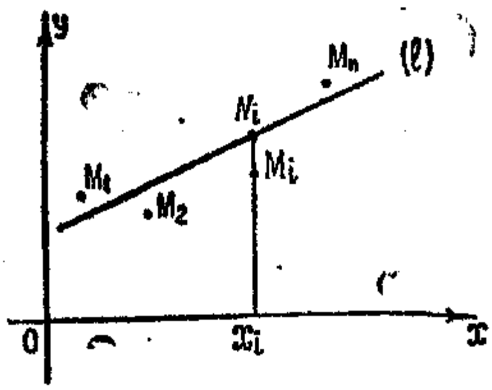

Рис. 8-а.

Предположим, что указанные точки расположены в достаточной близости от некоторой прямой (l), уравнение которой $y=ax+b$.

Как найти значения параметров «a» и «b» прямой, пользуясь приведенной выше таблицей?

Рассмотрим точку $M_i(x_i;\ y_i)$, которая в общем случае не лежит на прямой, и точку $N_i\ (x_i;\ ax_i+b)$, которая ле-