чаем, что $y=5z$. Подставив в (4) $x=2z$ и $y=5z$, получаем $4z^2-5z+z^2=0$ или $5z(z-1)=0$; $z_1=0$; $z_2=1$; тогда соответственно $x_1=0$; $y_1=0$; $x_2=2$; $y_2=5$.

Таким образом, получили две точки условного экстремума: $M_1(0, 0, 0)$ и $M_2(2, 5, 1)$. В первой точке функция u имеет минимум, а во второй — максимум.

$$u_{\min}=u\ (0, 0, 0)=0;\ u_{\max}=u\ (2, 5, 1)=4+25+1=30.$$

Функция имеет минимум в начале координат, а максимум в точке $M_2(2, 5, 1)$, которая принадлежит и параболоиду вращению $y=x^2+z^2$ и плоскости $2x-y+z=0$.

§15-а. ПОДБОР ПАРАМЕТРОВ КРИВЫХ ПО СПОСОБУ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Пусть в результате опыта зависимость между переменными x и y выражена в виде таблицы:

x	x_1	x_2	x_3	x_i		x_n
y	y_1	y_2	y_3	y_i		y_n

В системе координат xOy построим точки $M_1(x_1;\ y_1)$, $M_2(x_2;\ y_2)$, $M_3(x_3;\ y_3)$ ... $M_i(x_i;\ y_i)$ ... $M_n(x_n;\ y_n)$ (рис. 8-а).

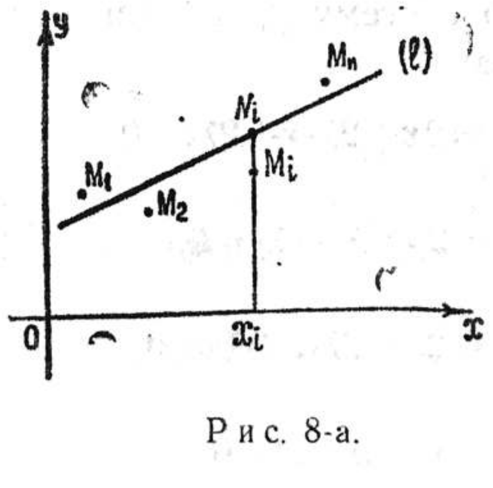

Рис. 8-а.

Предположим, что указанные точки расположены в достаточной близости от некоторой прямой (l), уравнение которой $y=ax+b$.

Как найти значения параметров «a» и «b» прямой, пользуясь приведенной выше таблицей?

Рассмотрим точку $M_i(x_i;\ y_i)$, которая в общем случае не лежит на прямой, и точку $N_i\ (x_i;\ ax_i+b)$, которая лежит на прямой (l). Разность ординат $(ax_i+b)-y_i$ характеризует отклонение точки $M_i(x_i;\ y_i)$ от прямой (l). Эта разность будет положительной, если рассматриваемая точка расположена ниже прямой и отрицательной, если точка расположена выше прямой. Выберем значения параметров a и b таким образом, чтобы сумма квадратов этих разностей была бы наименьшей. В этом состоит способ наименьших квадратов. Итак, определим наименьшее значение функции двух переменных:

$$S=f(a,\ b)=(ax_1+b-y_1)^2+(ax_2+b-y_2)^2+\dots$$

$$\dots+(ax_i+b-y_i)^2+\dots(ax_n+b-y_n)^2. \qquad (1)$$

Пользуясь необходимыми условиями существования экстремума, будем иметь: $\frac{\partial S}{\partial a}=0$ и $\frac{\partial S}{\partial b}=0$.

Или:

$$\frac{\partial S}{\partial a}=2(ax_1+b-y_1)\cdot x_1+2(ax_2+b-y_2)\cdot x_2+\dots$$

$$\dots+2(ax_i+b-y_i)\cdot x_i+\dots+2(ax_n+b-y_n)\cdot x_n=0;$$

$$\frac{\partial S}{\partial b}=2(ax_1+b-y_1)+2(ax_2+b-y_2)+\dots$$

$$\dots+2(ax_i+b-y_i)+\dots+2(ax_n+b-y_n)=0.$$

После простейших преобразований получим следующую систему двух линейных уравнений относительно неизвестных a и b:

$$\begin{cases} a(x_1^2+x_2^2+x_3^2+\dots+x_n^2)+b(x_1+x_2+\dots+x_n)- \\ \qquad -(x_1y_1+x_2y_2+\dots x_ny_n)=0; \\ a(x_1+x_2+x_3+\dots+x_n)+b\cdot n-(y_1+y_2+\dots y_n)=0. \end{cases}$$

Или, введя символы суммы, получим:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i; \\ a\sum_{i=1}^{n}x_i+bn=\sum_{i=1}^{n}y_i. \end{cases} \qquad (2)$$

Систему (2) можно представить иначе, если ввести средние значения величин x, y, x^2 и xy. Пусть

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}; \quad \overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}; \quad \overline{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n}; \quad \overline{x^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}.$$

Деля почленно уравнения (2) на n и подставляя средние значения $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{x^2}$, $\overline{xy}$, получим систему:

$$\begin{cases} a\overline{x^2} + b\overline{x} = \overline{xy}; \\ a\overline{x} + b = \overline{y}. \end{cases} \qquad (3)$$

Решая систему (3), получим такие значения параметров a и b, при которых уравнение $y = ax + b$ наилучшим образом выражает зависимость между переменными x и y по их значениям, данным в таблице (см. стр. 54).

Задача 132а. Значения переменных величин x и y, полученные в результате опыта, представлены в виде таблицы:

x	2	4	6	8	10
y	5,5	8,5	13,6	17,3	20,1

Предполагая, что переменные x и y связаны линейной зависимостью $y = ax + b$, найти способом наименьших квадратов параметры a и b.

Решение. Для вычисления величин $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{x^2}$ и $\overline{xy}$, входящих в систему (3), удобно составить следующую таблицу:

x	y	x^2	$x \cdot y$
2	5,5	4	11
4	8,5	16	34
6	13,6	36	81,6
8	17,3	64	138,4
10	20,1	100	201
$\sum$30	65	220	466

Так как $n=5$, то $\overline{x} = \frac{30}{5} = 6$; $\quad \overline{y} = \frac{65}{5} = 13$; $\quad \overline{x^2} = \frac{220}{5} = 44$ и $\overline{xy} = \frac{466}{5} = 93{,}2$. Подставив эти значения в (3), получим:

$$\begin{cases} 44a+6b=93{,}2; \\ 6a+b=13; \end{cases} \qquad \begin{cases} 44a+6b=93{,}2; \\ 36a+6b=78; \end{cases}$$

$$8a=15{,}2; \ a=1{,}9; \ b=1{,}6.$$

Таким образом, зависимость между переменными x и y выражается формулой $y=1{,}9x+1{,}6$.

Способом наименьших квадратов можно пользоваться и тогда, когда точки $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, ... $M_n(x_n; y_n)$ расположены в достаточной близости от некоторой параболы $y=ax^2+bx+c$. В этом случае полагают, что переменные x и y связаны между собой квадратичной функцией $y=$ $=ax^2+bx+c$.

Пусть $M_i(x_i; y_i)$ — точка, полученная по данным таблицы, а $N_i(x_i; ax_i^2+bx_i+c)$ — точка, лежащая на параболе. Разность ординат $(ax^2_i+bx_i+c)-y_i$ характеризует отклонение точки $M_i(x_i; y_i)$ от параболы. Выберем значения параметров a, b и c так, чтобы сумма квадратов этих разностей была наименьшей.

Как видно, задача сводится к тому, чтобы найти наименьшее значение функции трех переменных.

$$S=f(a,\ b,\ c)=(ax_1^2+bx_1+c-y_1)^2+(ax_2^2+bx_2+c-$$
$$-y_2)^2+\ldots+(ax_n^2+bx_n+c-y_n)^2. \qquad (4)$$

Пользуясь необходимыми условиями существования экстремума, имеем:

$$\frac{\partial S}{\partial a}=0; \quad \frac{\partial S}{\partial b}=0; \quad \frac{\partial S}{\partial c}=0.$$

Дифференцируя (4), находим частные производные по переменным a, b и c:

$$\frac{\partial S}{\partial a}=2(ax_1^2+bx_1+c-y_1)\cdot x_1^2+\ldots+2\ (ax_n^2+bx_n+$$
$$+c-y_n)\cdot x_n^2;$$

$$\frac{\partial S}{\partial b}=2(ax_1^2+bx_1+c-y_1)\cdot x_1+\ldots+2(ax_n^2+bx_n+$$
$$+c-y_n)\cdot x_n;$$

$$\frac{\partial S}{\partial c}=2(ax_1^2+bx_1+c-y_1)+\ldots+2(ax_n^2+bx_n+c-y_n).$$

Приравняв нулю частные производные, получим следующую систему трех уравнений с тремя неизвестными a, b и c:

$$\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 y_i; \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i; \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + c\cdot n = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i. \end{cases} \tag{5}$$

Если ввести средние значения величин x, y, x^2, x^3, x^4 xy и x^2y, то система (5) примет вид:

$$\begin{cases} a\overline{x^4}+b\overline{x^3}+c\overline{x^2}=\overline{x^2y}; \\ a\overline{x^3}+b\overline{x^2}+c\overline{x}=\overline{xy}; \\ a\overline{x^2}+b\overline{x}+c=\overline{y}. \end{cases} \tag{6}$$

Задача 132б. Значения переменных величин x и y, полученные в результате опыта, представлены в виде таблицы:

x	0	1	2	3	4
y	5	7	—4	7	5

Предполагая, что переменные x и y связаны квадратичной функцией $y=ax^2+bx+c$, найти способом наименьших квадратов параметры a, b и c.

Решение. Для вычисления величин, входящих в систему (6), составим таблицу:

x	y	x^2	x^3	x^4	xy	x^2y
0	5	0	0	0	0	0
1	7	1	1	1	7	7
2	—4	4	8	16	—8	—16
3	7	9	27	81	21	63
4	5	16	64	256	20	80
Σ 10	20	30	100	354	40	134

Так как $n=5$, то получаем $\overline{x}=2$; $\overline{y}=4$; $\overline{x^2}=6$; $\overline{x^3}=20$; $\overline{x^4}=70{,}8$; $\overline{xy}=8$ и $\overline{x^2y}=26{,}8$.

Подставив эти значения в систему (6), получим:

$$\begin{cases} 70{,}8a+20b+6c=26{,}8; \\ 20a+6b+2c=8; \\ 6a+2b+c=4. \end{cases}$$

Чтобы решить эту систему, умножим третье уравнение на 2 и затем полученные коэффициенты вычтем почленно из второго уравнения. В результате получим $8a+2b=0$, откуда $b=-4a$.

Заменив в третьем уравнении b на $-4a$, находим $c=4+$ $+2a$. Подставив в первое уравнение неизвестные b и c, выраженные через a, получим $70{,}8a-80a+24+12a=26{,}8$; $2{,}8a=2{,}8$, откуда $a=1$; тогда $b=-4$ и $c=6$.

Следовательно, искомая зависимость между переменными x и y выражается формулой $y=x^2-4x+6$.