3.2.40. Используя единичные векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$, доказать, что для всякого треугольника ABC справедливо неравенство

$$\cos A + \cos B + \cos C \leqslant \frac{3}{2}.$$

3.2.41. Следует ли из равенства $\bar{a}\cdot\bar{e} = \bar{b}\cdot\bar{e}$, где $\bar{e}$ — единичный вектор, равенство векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$?

3.2.42. Каков геометрический смысл равенства $(\bar{a}+\bar{b})^2 + (\bar{a}-\bar{b})^2 = 2(\bar{a}^2+\bar{b}^2)$?

3.2.43. Доказать, что $-ab \leqslant \bar{a}\cdot\bar{b} \leqslant ab$; в каких случаях здесь имеет место знак равенства?

3.2.44. Пусть $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ — ненулевые векторы. При каком их взаимном расположении справедливо равенство: $(\bar{a}\cdot\bar{b})\cdot\bar{c} = \bar{a}\cdot(\bar{b}\cdot\bar{c})$?

3.2.45. Можно ли говорить о скалярном произведении трех векторов? О скалярном кубе вектора?

3.2.46. Изменится ли скалярное произведение двух векторов, если к одному из них добавить вектор, перпендикулярный к другому сомножителю?

3.2.47. Коллинеарны ли векторы $\bar{c}_1 = 2\bar{a}+4\bar{b}$ и $\bar{c}_2 = 3\bar{b}-\bar{a}$, построенные по векторам $\bar{a} = (1;-2;3)$, $\bar{b} = (3;0;-1)$?

3.2.48. Равносильны ли следующие два равенства:
а) $\bar{a} = \bar{b}$ и $\alpha\bar{a} = \alpha\bar{b}$;
б) $\bar{a} = \bar{b}$ и $\bar{a}\cdot\bar{c} = \bar{b}\cdot\bar{c}$;
в) $\bar{a} = \bar{b}$ и $\bar{a}+\bar{c} = \bar{b}+\bar{c}$?

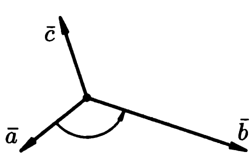
3.2.49. Какова длина отрезка MN, если $\overline{MN}^2 = 16$?

3.2.50. Какой угол образует вектор $\bar{a} = (\cos\alpha; \sin\alpha)$ с вектором $\bar{i}$?

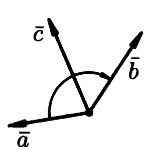
3.2.51. Как расположены прямые AB и AC, если $(\overline{AB}+\overline{AC})^2 = (\overline{AB}-\overline{AC})^2$?

§ 3. ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

⇛ Три некомпланарных вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, взятые в указанном порядке, образуют *правую (левую) тройку*, если с конца вектора $\bar{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\bar{a}$ ко второму вектору $\bar{b}$ виден совершающимся против часовой стрелки, (соотв. по часовой стрелке) (см. рис. 11).



правая тройка,



левая тройка

Рис. 11

⇛ *Векторным произведением* неколлинеарных векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}$, определяемый условиями:

1) вектор $\bar{c}$ перпендикулярен векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$, т.е. $\bar{c} \perp \bar{a}$, $\bar{c} \perp \bar{b}$;

2) длина вектора $\bar{c}$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ как на сторонах, т.е.

$$|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin\varphi, \qquad \varphi = (\widehat{\bar{a}, \bar{b}}); \tag{3.1}$$

3) векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ образуют правую тройку.

Векторное произведение обозначается $\bar{a} \times \bar{b}$ или $[\bar{a}, \bar{b}]$.

Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны (в частности, один из этих векторов нулевой), то по определению $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$.

Свойства векторного произведения:

1. $\bar{a} \times \bar{b} = -(\bar{b} \times \bar{a})$ (антиперестановочность);

2. $\lambda \cdot (\bar{a} \times \bar{b}) = \lambda\bar{a} \times \bar{b} = \bar{a} \times \lambda\bar{b}$ (сочетательность по отношению к скалярному множителю);

3. $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$ (распределительность);

4. $\bar{a} \times \bar{b} = 0$ если $\bar{a} \parallel \bar{b}$ (или $\bar{a} = 0$ или $\bar{b} = 0$). В частности: $\bar{i} \times \bar{i} = \bar{j} \times \bar{j} = \bar{k} \times \bar{k} = \bar{0}$.

Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы своими координатами $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $\bar{b} = (b_x; b_y; b_z)$, то

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}, \quad \text{или} \quad \bar{a} \times \bar{b} = \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}; - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right). \tag{3.2}$$

Для вычисления *площади параллелограмма*, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ применяется формула

$$S = |\bar{a} \times \bar{b}|. \tag{3.3}$$

Векторное произведение может быть выражено формулой

$$\bar{a} \times \bar{b} = S \cdot \bar{e}, \tag{3.4}$$

где $\bar{e}$ — орт направления $\bar{a} \times \bar{b}$.

3.3.1. Даны два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$, для которых $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 6$, $\varphi = (\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = \frac{5}{6}\pi$. Найти

а) $\bar{a} \times \bar{b}$;

б) $|(2\bar{a} + 3\bar{b}) \times (\bar{a} - 4\bar{b})|$.

◐ а) По формуле (3.1) находим модуль векторного произведения: $|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = 2 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 6$. По формуле (3.4) получаем $\bar{a} \times \bar{b} = 6 \cdot \bar{e}$, где $\bar{e}$ — единичный вектор направления $\bar{a} \times \bar{b}$;

б) Согласно свойствам векторного произведения получаем:

$$(2\bar{a}+3\bar{b})\times(\bar{a}-4\bar{b}) = 2(\bar{a}\times\bar{a}) - 8(\bar{a}\times\bar{b}) + 3(\bar{b}\times\bar{a}) - 12(\bar{b}\times\bar{b}) = \\ = -8(\bar{a}\times\bar{b}) - 3(\bar{a}\times\bar{b}) = -11(\bar{a}\times\bar{b}).$$

Следовательно,

$$|(2\bar{a}+3\bar{b})\times(\bar{a}-4\bar{b})| = |-11(\bar{a}\times\bar{b})| = 11\cdot|\bar{a}\times\bar{b}| = 11\cdot 6 = 66. \quad \bullet$$

3.3.2. Найти координаты вектора $\bar{a}\times(2\bar{a}+\bar{b})$, если $\bar{a}=(3;-1;-2)$, $\bar{b}=(1;2;-1)$.

3.3.3. Даны векторы $\bar{a}=\bar{i}+2\bar{j}-3\bar{k}$, $\bar{b}=-2\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}$. Найти: $\bar{c}= (\bar{a}-\bar{b})\times(2\bar{b})$; $|\bar{c}|$.

3.3.4. Дано: $|\bar{a}|=1$, $|\bar{b}|=2$, $(\widehat{\bar{a},\bar{b}})=\frac{2}{3}\pi$. Найти: $|\bar{a}\times\bar{b}|$; $|(\bar{a}+2\bar{b})\times(-\bar{a}+3\bar{b})|$.

3.3.5. Найти площадь треугольника с вершинами $A(1;2;0)$, $B(3;2;1)$, $C(-2;1;2)$.

○ Площадь S треугольника ABC равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, т.е. $S=\frac{1}{2}|\overline{AB}\times\overline{AC}|$. Имеем: $\overline{AB}=(2;0;1)$, $\overline{AC}=(-3;-1;2)$. Тогда (см. (3.2))

$$\overline{AB}\times\overline{AC} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}\right),$$

т.е. $\overline{AB}\times\overline{AC}=(1;-7;-2)$. Следовательно, $S=\frac{1}{2}\sqrt{1+49+4}$,

$S=\frac{3\sqrt{6}}{2}$. ●

3.3.6. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\bar{a}= \bar{i}-2\bar{j}+5\bar{k}$ и $\bar{b}=5\bar{j}-7\bar{k}$.

3.3.7. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}=(8;4;1)$ и $\bar{b}=(2;-2;1)$.

3.3.8. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол 45°. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\bar{a}-2\bar{b}$ и $3\bar{a}+2\bar{b}$, если $|\bar{a}|=|\bar{b}|=5$.

3.3.9. Сила $\bar{F}=(2;-4;5)$ приложена к точке $O(0;2;1)$. Определить момент этой силы относительно точки $A(-1;2;3)$.

○ Момент силы $\bar{F}$ относительно точки A есть вектор $\overline{M}= \overline{OA}\times\bar{F}$. Находим координаты вектора $\overline{OA}$ и искомого вектора $\overline{M}$: $\overline{OA}=(-1;0;2)$,

$$\overline{M}=\overline{OA}\times\bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 5 \end{vmatrix} = \\ = \bar{i}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 8\bar{i}+9\bar{j}+4\bar{k},$$

т.е. $\overline{M}=(8;9;4)$. ●

3.3.10. Дана сила $\bar{F} = (3; 4; -2)$ и точка ее приложения $A(2; -1; 3)$. Найти момент силы относительно точки $O(0; 0; 0)$ и направление момента силы.

3.3.11. Три силы $\bar{F}_1 = (2; 4; 6)$, $\bar{F}_2 = (1; -2; 3)$ и $\bar{F}_3 = (1; 1; -7)$ приложены к точке $A(3; -4; 8)$. Найти величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки $B(4; -2; 6)$.

Дополнительные задачи

3.3.12. Упростить выражения:
а) $2\bar{i}(\bar{j} \times \bar{k}) + 3\bar{j}(\bar{i} \times \bar{k}) + 4\bar{k}(\bar{i} \times \bar{j})$;
б) $(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) \times \bar{c} + (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) \times \bar{b} + (\bar{b} - \bar{c}) \times \bar{a}$;
в) $(3\bar{i} - 4\bar{j} - 5\bar{k}) \times (2\bar{i} + 6\bar{j} - \bar{k})$.

3.3.13. Показать, что $(\bar{a} - \bar{b}) \times (\bar{a} + \bar{b}) = 2(\bar{a} \times \bar{b})$; выяснить геометрический смысл этого равенства.

3.3.14. Показать, что $(\bar{a}\bar{b})^2 + (\bar{a} \times \bar{b})^2 = |\bar{a}|^2|\bar{b}|^2$.

3.3.15. Дано: $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 20$, $\bar{a}\bar{b} = 30$. Найти $|\bar{a} \times \bar{b}|$.

3.3.16. Дано: $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 26$, $|\bar{a} \times \bar{b}| = 72$. Найти $\bar{a}\bar{b}$.

3.3.17. Найти единичный вектор $\bar{c}$, перпендикулярный каждому из векторов $\bar{a} = (3; -1; 2)$ и $\bar{b} = (-1; 3; -1)$.

3.3.18. Найти единичный вектор $\bar{e}$, перпендикулярный вектору $\bar{a} = (1; 4; 3)$ и оси абсцисс.

3.3.19. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a} = 3\bar{p} + 2\bar{q}$ и $\bar{b} = 2\bar{p} - \bar{q}$, где $|\bar{p}| = 4$, $|\bar{q}| = 3$, $(\widehat{\bar{p}, \bar{q}}) = \frac{3}{4}\pi$.

3.3.20. Найти площадь треугольника с вершинами $A(1; -2; 3)$, $B(0; -1; 2)$, $C(3; 4; 5)$.

3.3.21. Даны векторы $\bar{a} = (-4; -8; 8)$, $\bar{b} = (4; 3; 2)$. Найти векторное произведение, синус угла между ними, площадь параллелограмма, построенного на этих векторах.

3.3.22. Даны векторы $\bar{a} = 3\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$, $\bar{b} = 2\bar{i} + 7\bar{j} + 4\bar{k}$ и $\bar{c} = \bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$. Найти $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$ и $(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c}$.

3.3.23. Найти координаты вектора $\bar{x}$, перпендикулярного оси аппликат и вектору $\bar{a} = (8; -15; 3)$. Вектор $\bar{x}$ образует острый угол с осью абсцисс; $|\bar{x}| = 51$.

3.3.24. Найти длины диагоналей и площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a} = \bar{k} - \bar{j}$, $\bar{b} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$.

3.3.25. Вычислить синус угла, образованного векторами $\bar{a} = (2; -2; 1)$ и $\bar{b} = (2; 3; 6)$.

3.3.26. Даны вершины треугольника $A(1; -1; 2)$, $B(5; -6; 2)$, $C(1; 3; -1)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.

3.3.27. Найти вектор $\bar{x}$, перпендикулярный к векторам $\bar{a} = (2; -3; 1)$ и $\bar{b} = (1; -2; 3)$ и удовлетворяющий условию $\bar{x} \cdot (\bar{i} + 2\bar{j} - 7\bar{k}) = 10$.

3.3.28. Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ удовлетворяют условию $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c} = \bar{0}$. Доказать, что $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{b} \times \bar{c} = \bar{c} \times \bar{a}$.

3.3.29. Дано: $\bar{a} = (1; -4; 0)$, $\bar{b} = (6; 3; -2)$, $\bar{c} = (1; -2; 2)$. Найти $\text{пр}_{\bar{a}}(\bar{b}\times\bar{c})$.

3.3.30. Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ и $\bar{d}$ связаны соотношениями $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{c} \times \bar{d}$, $\bar{a} \times \bar{c} = \bar{b} \times \bar{d}$. Доказать, что векторы $(\bar{a} - \bar{d})$ и $(\bar{b} - \bar{c})$ коллинеарны.

Контрольные вопросы и более сложные задачи

3.3.31. Доказать, что точки A, B и C лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\overline{AB} \times \overline{AC} = 0$.

3.3.32. Доказать, что векторное произведение не изменится, если к одному из сомножителей прибавить вектор, коллинеарный другому сомножителю.

3.3.33*. Доказать тождество Лагранжа:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 = \\ = \begin{vmatrix} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 & a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 \\ a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 & a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 \end{vmatrix}.$$

3.3.34. Найти площадь треугольника ABC с вершинами в точках $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$.

3.3.35. На векторах $\bar{a} = (2; -1; 7)$ и $\bar{b} = (1; 0; -4)$ построен параллелограмм. Найти высоту, опущенную из конца вектора $\bar{b}$, и площадь треугольника, образованного этой высотой и сторонами параллелограмма.

3.3.36. Доказать, что для любых векторов $\bar{a}$, $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{r}$ векторы $\bar{a}\times\bar{p}$, $\bar{a}\times\bar{q}$, $\bar{a} \times \bar{r}$ компланарны.

3.3.37. Три ненулевых вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$, и $\bar{c}$ связаны соотношениями $\bar{a} = \bar{b} \times \bar{c}$, $\bar{b} = \bar{c} \times \bar{a}$, $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$. Найти длины этих векторов и углы между ними.

3.3.38. Доказать, что $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{b} \cdot (\bar{a} \cdot \bar{c}) - \bar{c} \cdot (\bar{a} \cdot \bar{b})$.

Указание. орт $\bar{i}$ сонаправить с вектором $\bar{b}$, орт $\bar{j}$ — в плоскости векторов $\bar{b}$ и $\bar{c}$. Найти координаты обеих частей и убедиться, что они равны.

3.3.39. Вывести формулу для $\sin(\alpha - \beta)$.

Указание. рассмотреть в плоскости Oxy два единичных вектора $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$, составляющих с осями углы α и β соответственно; найти $\bar{e}_1 \times \bar{e}_2$.