3.3.40. Какому условию должны удовлетворять векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, чтобы векторы $3\bar{a}+\bar{b}$ и $\bar{a}-3\bar{b}$ были коллинеарны?

3.3.41. При каких значениях α и β векторы $\bar{a}=\alpha\bar{i}+7\bar{j}+3\bar{k}$ и $\bar{b}=\bar{i}+$ $+\beta\bar{j}+2\bar{k}$ коллинеарны?

3.3.42. Дано: $\bar{a}\times\bar{c}=\bar{b}\times\bar{c}$, $\bar{c}\neq 0$. Можно ли отсюда заключить, что $\bar{a}=\bar{b}$?

3.3.43. Чему равно векторное произведение противоположных векторов?

3.3.44. Чему равно:

а) $\bar{j}\times\bar{i}$;

б) $\bar{j}\times(\bar{j}+\bar{k})$;

в) $2\bar{i}\times(\bar{k}-5\bar{j})$?

3.3.45. Равносильны ли равенства $\bar{a}=\bar{b}$ и $\bar{a}\times\bar{c}=\bar{b}\times\bar{c}$?

3.3.46*. Даны два вектора $\bar{a}\neq 0$, $\bar{b}\neq 0$. Можно ли подобрать вектор $\bar{x}$ так, чтобы $\bar{a}=\bar{b}\times\bar{x}$?

3.3.47. Чему равно векторное произведение коллинеарных векторов? векторов $\bar{a}$ и $(-\bar{a})$?

3.3.48. Найти:

1) $\bar{j}\times\bar{i}$;

2) $2\bar{i}\times 5\bar{j}$;

3) $\bar{i}\times(\bar{i}+\bar{k})$.

3.3.49. Верно ли соотношение $|\bar{a}\times\bar{b}|\leqslant|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|$?

3.3.50. Существуют ли такие векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, что $\bar{a}\times\bar{b}=\bar{b}\times\bar{a}$?

§ 4. СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

⇛ *Смешанным произведением* трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\bar{a}\times\bar{b}$ на вектор $\bar{c}$.

Обозначение: $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$.

Таким образом:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$$

Геометрически смешанное произведение интерпретируется как число, равное *объему* параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ как на ребрах. Смешанное произведение векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ положительно, если данные векторы образуют правую тройку, и отрицательно — если левую.

Свойства смешанного произведения:

1. $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=(\bar{b}\times\bar{c})\cdot\bar{a}=(\bar{c}\times\bar{a})\cdot\bar{b}$, т. е. смешанное произведение не меняется при циклической перестановке векторов;

2. $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})$, т. е. смешанное произведение не меняется при перестановке знаков векторного и скалярного умножения;

3. $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = -\bar{a}\bar{c}\bar{b} = -\bar{b}\bar{a}\bar{c} = \bar{c}\bar{b}\bar{a}$ т.е. смешанное произведение меняет знак на противоположный при перемене мест любых двух векторов-сомножителей;

4. $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0$, если $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ компланарны (в частности, если любые два из перемножаемых вектора коллинеарны).

Если векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ заданы своими координатами $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $\bar{b} = (b_x; b_y; b_z)$, $\bar{c} = (c_x; c_y; c_z)$ то

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{4.1}$$

Если $\bar{a}\bar{b}\bar{c} > 0$, то $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ — правая тройка; $\bar{a}\bar{b}\bar{c} < 0$ — левая.

Объем V_1 параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, и объем V_2, построенной на них треугольной пирамиды, находятся по формулам

$$V_1 = |\bar{a}\bar{b}\bar{c}|, \tag{4.2}$$

$$V_2 = \frac{1}{6}|\bar{a}\bar{b}\bar{c}|. \tag{4.3}$$

3.4.1. Доказать, что четыре точки $A_1(3;5;1)$, $A_2(2;4;7)$, $A_3(1;5;3)$, $A_4(4;4;5)$ лежат в одной плоскости.

◐ Достаточно показать, что три вектора $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_1A_4}$, имеющие начало в одной из данных точек, лежат в одной плоскости (т.е. компланарны). Находим координаты векторов $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_1A_4}$:

$$\overline{A_1A_2} = (2-3; 4-5; 7-1) = (-1; -1; 6);$$
$$\overline{A_1A_3} = (1-3; 5-5; 3-1) = (-2; 0; 2);$$
$$\overline{A_1A_4} = (4-3; 4-5; 5-1) = (1; -1; 4).$$

Проверяем условие компланарности векторов (свойство 4 смешанного произведения векторов):

$$\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_1A_3} \cdot \overline{A_1A_4} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 - 2 + 12 - 0 - 2 - 8 = 0.$$

Итак, векторы $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$ и $\overline{A_1A_4}$ коллинеарны, следовательно точки A_1, A_2, A_3, A_4 лежат в одной плоскости. ●

3.4.2. Проверить компланарны ли данные векторы:

а) $\bar{a} = (1; 2; -2)$, $\bar{b} = (1; -2; 1)$, $\bar{c} = (5; -2; -1)$;

б) $\bar{a} = \bar{j} + \bar{k}$, $\bar{b} = \bar{j} - \bar{k}$, $\bar{c} = \bar{i}$.

3.4.3. При каком значении λ векторы $\bar{a} = \bar{i} + \bar{j} + \lambda\bar{k}$, $\bar{b} = (0; 1; 0)$ и $\bar{c} = (3; 0; 1)$ компланарны?

3.4.4. Даны вершины пирамиды $A(5;1;-4)$, $B(1;2;-1)$, $C(3;3;-4)$, $S(2;2;2)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины S на грань ABC.

◯ Так как объем V пирамиды есть $V = \frac{1}{3}S'h$, то $h = \frac{3V}{S'}$, где $h = |SO|$ — высота пирамиды, S' — площадь основания (рис. 12).

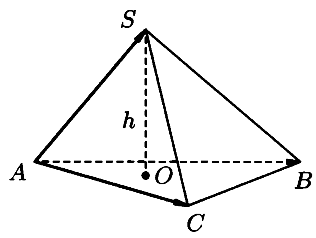

Рис. 12

Находим V: $\overline{AS} = (-3;1;6)$, $\overline{AB} = (-4;1;3)$, $\overline{AC} = (-2;2;0)$. И согласно формуле (4.3):

$$V = \frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix} -3 & 1 & 6 \\ -4 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6}\left|-3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{6}|18-6-36| = \frac{1}{6}|-24| = 4.$$

Находим $S' = S'_{\triangle ABC}$:

$$S' = \frac{1}{2}|\overline{AB}\times\overline{AC}| = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -4 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}|-6\bar{i}-6\bar{j}-6\bar{k}| = \frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{3} = 3\sqrt{3}.$$

Следовательно, $h = \frac{3\cdot 4}{3\cdot\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. ●

3.4.5. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a} = (1;-2;1)$, $\bar{b} = (3;2;1)$, $\bar{c} = (1;0;-1)$.

3.4.6. Найти высоту параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a} = (2;1;-3)$, $\bar{b} = \bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$, $\bar{c} = (1;-3;1)$, опущенную на грань, построенную на векторах $\bar{b}$ и $\bar{c}$.

3.4.7. Найти объем треугольной призмы, построенной на векторах $\bar{a} = (1;2;3)$, $\bar{b} = (2;4;1)$, $\bar{c} = (2;-1;0)$.

3.4.8. Вычислить $(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})(\bar{a}-\bar{b}-\bar{c})(\bar{a}-\bar{b}+\bar{c})$.

❍ Используя свойства смешанного произведения векторов, получаем:

$$(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})(\bar{a}-\bar{b}-\bar{c})(\bar{a}-\bar{b}+\bar{c}) = ((\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})\times(\bar{a}-\bar{b}-\bar{c}))\cdot(\bar{a}-\bar{b}+\bar{c}) =$$
$$= (\bar{a}\times\bar{a}-\bar{a}\times\bar{b}-\bar{a}\times\bar{c}+\bar{b}\times\bar{a}-\bar{b}\times\bar{b}-\bar{b}\times\bar{c}+\bar{c}\times\bar{a}-\bar{c}\times\bar{b}-\bar{c}\times\bar{c})\cdot(\bar{a}-\bar{b}+\bar{c}) =$$
$$= (0-\bar{a}\times\bar{b}-\bar{a}\times\bar{c}-\bar{a}\times\bar{b}-0-\bar{b}\times\bar{c}-\bar{a}\times\bar{c}+\bar{b}\times\bar{c}-0)\cdot(\bar{a}-\bar{b}+\bar{c}) =$$
$$= (-2\bar{a}\times\bar{b}-2\bar{a}\times\bar{c})\cdot(\bar{a}-\bar{b}+\bar{c}) = -2(\bar{a}\times\bar{b}+\bar{a}\times\bar{c})\cdot(\bar{a}-\bar{b}+\bar{c}) =$$
$$= -2(\bar{a}\bar{b}\bar{a}-\bar{a}\bar{b}\bar{b}+\bar{a}\bar{b}\bar{c}+\bar{a}\bar{c}\bar{a}-\bar{a}\bar{c}\bar{b}+\bar{a}\bar{c}\bar{c}) =$$
$$= -2(0-0+\bar{a}\bar{b}\bar{c}+0+\bar{a}\bar{b}\bar{c}+0) = -2\cdot 2\bar{a}\bar{b}\bar{c} = -4\bar{a}\bar{b}\bar{c}.$$ ●

3.4.9. Вычислить произведение $(\bar{a}-\bar{b})(\bar{b}-\bar{c})(\bar{c}-\bar{a})$.

3.4.10. Вычислить произведение $\bar{a}(\bar{b}-\bar{c})(\bar{a}+\bar{b}+2\bar{c})$.

3.4.11. Какую тройку образуют векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$:

а) $\bar{a}=\bar{i}+\bar{j}$, $b=\bar{i}-\bar{j}$, $\bar{c}=\bar{k}$;

б) $\bar{a}=(1;-4;0)$, $\bar{b}=(6;3;-2)$, $\bar{c}=(1;-2;2)$?

3.4.12. Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ взаимно перпендикулярны, образуют правую тройку. Найти $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$, зная что $|\bar{a}|=4$, $|\bar{b}|=2$, $|\bar{c}|=3$.

3.4.13. Даны векторы $\bar{a}=(3;5;-1)$, $\bar{b}=(0;-2;1)$ и $\bar{c}=(-2;2;3)$. Найти $(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}$.

Дополнительные задачи

3.4.14. Вычислить произведение $\bar{b}(\bar{c}+\bar{a})(\bar{b}+2\bar{c})$, если $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=5$.

3.4.15. Вектор $\bar{c}$ перпендикулярен векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$; $(\widehat{\bar{a},\bar{b}})=\frac{\pi}{6}$, $|\bar{a}|=6$, $|\bar{b}|=3$, $|\bar{c}|=3$. Найти $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$.

3.4.16. Найти объем пирамиды с вершинами $A_1(0;0;1)$, $A_2(2;3;5)$, $A_3(6;2;3)$, $A_4(3;7;2)$.

3.4.17. Показать, что точки $A(5;7;-2)$, $B(3;1;-1)$, $C(9;4;-4)$ и $D(1;5;0)$ лежат в одной плоскости.

3.4.18. Даны вершины пирамиды $A(-5;-4;8)$, $B(2;3;1)$, $C(4;1;-2)$, $D(6;3;7)$. Найти длину высоты, опущенной на грань BCD.

3.4.19. Объем тетраэдра равен 5, три его вершины находятся в точках $A(2;1;-1)$, $B(3;0;1)$, $C(2;-1;+3)$. Найти координаты четвертой вершины D, если известно, что она лежит на оси ординат.

3.4.20. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, построенный на векторах $\overline{AB}=(4;3;0)$, $\overline{AD}=(2;1;2)$ и $\overline{AA_1}=(-3;-2;5)$. Найти:

а) объем параллелепипеда;

б) площадь грани $ABCD$;

в) длину высоты, проведенной из вершины A_1;

г) угол между ребром AB и диагональю BD_1.

3.4.21. Дана пирамида с вершинами в точках $A_1(1;2;3)$, $A_2(-2;4;1)$, $A_3(7;6;3)$, $A_4(4;-3;-1)$. Найти:

а) длину ребер A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4;

б) площадь грани $A_1A_2A_3$;

в) угол между ребрами A_1A_4 и A_1A_3;

г) объем пирамиды;

д) длину высоты, опущенной на грань $A_1A_2A_3$.

Контрольные вопросы и более сложные задачи

3.4.22. Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ удовлетворяют условию $\bar{a}\times\bar{b}+\bar{b}\times\bar{c}+\bar{c}\times\bar{a}=0$. Доказать, что эти векторы компланарны.

3.4.23. Показать, что объем параллелепипеда, построенного на диагоналях граней данного параллелепипеда, равен удвоенному объему данного параллелепипеда.

3.4.24. Найти $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})-(\bar{e}\times\bar{f})\times\bar{q}$, если $\bar{a}=(1;2;-2)$, $\bar{b}=(-2;3;1)$, $\bar{c}=(2;-2;2)$, $\bar{e}=(-1;3;5)$, $\bar{f}=(1;0;-2)$, $\bar{q}=(3;-2;2)$.

3.4.25. Найти объем V пирамиды с вершинами в точках $A_1(x_1;y_1;z_1)$, $A_2(x_2;y_2;z_2)$, $A_3(x_3;y_3;z_3)$, $A_4(x_4;y_4;z_4)$. При каком условии точки A_1, A_2, A_3, A_4 принадлежат одной плоскости?

3.4.26. Даны единичные векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$. Зная, что $(\widehat{\bar{e}_1,\bar{e}_2})=$ $=(\widehat{\bar{e}_3,\bar{e}_1\times\bar{e}_2})=\alpha$, доказать равенство $(\bar{e}_1\times\bar{e}_2)\cdot\bar{e}_3=\frac{1}{2}\sin 2\alpha$.

3.4.27. Зная, что $\bar{c}=\lambda_1\bar{a}+\lambda_2\bar{b}$ найти соотношение между векторами $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, не содержащее коэффициентов λ_1 и λ_2.

Указание. исключить λ_1 можно умножением равенства векторно на $\bar{a}$.

3.4.28. Доказать, что $|\bar{a}\bar{b}\bar{c}|\leqslant|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot|\bar{c}|$; в каком случае имеет место знак равенства?

3.4.29. Чему равно $\bar{a}\bar{b}(\bar{c}+\lambda_1\bar{a}+\lambda_2\bar{b})$, где λ_1 и λ_2 — произвольные числа?

3.4.30. Доказать (геометрически), что при любых векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ векторы $\bar{a}-\bar{b}$, $\bar{b}-\bar{c}$, $\bar{c}-\bar{a}$ компланарны. Каков геометрический смысл этого факта?

3.4.31. Чему равно $\bar{a}\bar{b}\bar{a}$?

3.4.32. Известно, что $\bar{c}=\lambda_1\bar{a}+\lambda_2\bar{b}$, λ_1 и λ_2 — числа. Чему равно $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$? Пояснить алгебраически.