Глава 4. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

❑

§ 1. МЕТОД КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ

Прямоугольная система координат

Метод координат заключается в установлении соответствия между точками прямой (плоскости, пространства) и их координатами — действительными числами при помощи системы координат.

⇛ *Прямоугольная система координат Oxy на плоскости* задается двумя взаимно перпендикулярными прямыми, на каждой из которых выбрано положительное направление и задан единичный отрезок. Эти прямые называют *осями координат*. Одну из осей называют *осью абсцисс* и обозначают Ox, другую — *осью ординат* (Oy).

Единичные векторы осей Ox и Oy обозначают соответственно $\bar{i}$ и $\bar{j}$ Если M — произвольная точка плоскости, то вектор $\overline{OM}$ называется *радиусом-вектором* точки M.

⇛ *Координатами* точки M в системе координат Oxy называются координаты радиус-вектора $\overline{OM}$.

Если $\overline{OM} = (x; y)$, то координаты точки M записывают так: $M(x; y)$; при этом число x называется — *абсциссой* точки M, а число y — *ординатой* точки M. Координаты точки полностью определяют ее положение на плоскости: каждой паре чисел x и y соответствует единственная точка M плоскости, и наоборот.

Расстояние между двумя точками $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ на плоскости вычисляется по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{1.1}$$

Координаты $(x; y)$ *точки M, делящей в заданном отношении λ отрезок AB*, где $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ $(\lambda = \frac{AM}{MB})$, находятся по формулам

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \tag{1.2}$$

В частности, при $\lambda = 1$ (точка M делит отрезок AB пополам), получаются формулы координат середины отрезка

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \tag{1.3}$$

Площадь треугольника с вершинами $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$ вычисляется по формуле

$$S=\frac{1}{2}|(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)| \qquad (1.4)$$

или, что то же самое: $S=\frac{1}{2}|\Delta|$, где $\Delta=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}$.

4.1.1. Найти точку, симметричную точке $A(-2;4)$ относительно биссектрисы первого координатного угла.

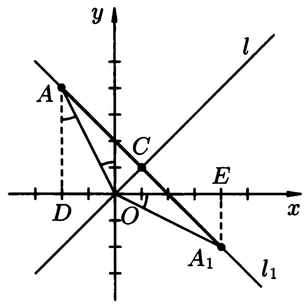

Рис. 13

◔ Проведем через точку А прямую l_1, перпендикулярную биссектрисе l первого координатного угла (рис. 13). Пусть $l_1\cap l=C$. На прямой l_1 отложим отрезок CA_1, равный отрезку AC. Прямоугольные треугольники ACO и A_1CO равны между собой (по двум катетам). Отсюда следует, что $|OA|=|OA_1|$. Треугольники ADO и OEA_1 также равны между собой (по гипотенузе и острому углу). Заключаем, что $|AD|=|OE|=4$, $|OD|\doteq|EA_1|=2$, т. е. точка A_1 имеет координаты $x=4$, $y=-2$, т. е. $A_1(4;-2)$.

Отметим, что имеет место общее утверждение: точка A_1, симметричная точке $A(a;b)$ относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов, имеет координаты $(b;a)$, т. е. $A_1(b;a)$. ●

4.1.2. Дана точка $A(3;-2)$. Найти координаты точек, симметричных точке A относительно оси Ox, оси Oy, начала координат.

4.1.3. Найти координаты точки A_1, симметричной точке $A(2;4)$ относительно биссектрисы:

1) второго и четвертого координатных углов;

2) первого и третьего координатных углов.

4.1.4. В треугольнике с вершинами $A(2;3)$, $B(6;3)$, $C(6;-5)$ найти длину биссектрисы BM.

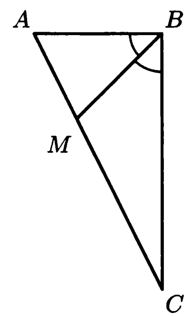

Рис. 14

◔ По свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника $\frac{|CM|}{|MA|}=\frac{|BC|}{|BA|}$ (рис. 14). Находим, используя формулу (1.1), длины сторон BC и BA треугольника ABC: $|BC|=\sqrt{(6-6)^2+(-5-3)^2}=8$, $|BA|=\sqrt{(2-6)^2+(3-3)^2}=4$. Следовательно,

$\lambda = \dfrac{|CM|}{|MA|} = \dfrac{8}{4}$, т. е. $\lambda = 2$. Находим координаты x_M и y_M точки M, используя формулу (1.2): $x_M = \dfrac{6+2\cdot 2}{1+2}$, $y_M = \dfrac{-5+2\cdot 3}{1+2}$, т. е. $x_M = \frac{10}{3}$, $y_M = \frac{1}{3}$, т. е. $M\left(\frac{10}{3}; \frac{1}{3}\right)$. Находим длину биссектрисы BM: $BM = \sqrt{\left(\frac{10}{3}-6\right)^2 + \left(\frac{1}{3}-3\right)^2} = \sqrt{\frac{64}{9}+\frac{64}{9}} = \frac{8}{3}\sqrt{2}$, т. е. $BM = \frac{8}{3}\sqrt{2}$. ●

4.1.5. Доказать, что треугольник с вершинами $A(-2;-1)$, $B(6;1)$, $C(3;4)$ — прямоугольный.

4.1.6. Точки $A(2;4)$, $B(-3;7)$ и $C(-6;6)$ — три вершины параллелограмма, причем A и C — противоположные вершины. Найти четвертую вершину.

4.1.7. Дан треугольник с вершинами $A(-2;4)$, $B(-6;8)$, $C(5;-6)$. Найти площадь этого треугольника.

4.1.8. Найти точку, в которой прямая, проходящая через точки $A(5;5)$ и $B(1;3)$, пересечет ось Ox.

◐ Координаты искомой точки C есть $(x;0)$. А так как точки A, B и C лежат на одной прямой, то должно выполняться условие $(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1) = 0$ (формула (1.4), площадь треугольника ABC равна нулю!), где $(x_1;y_1)$ — координаты точки A, $(x_2;y_2)$ — точки B, $(x_3;y_3)$ — точки C. Получаем $(1-5)(0-5)-(x-5)(3-5) = 0$, т. е. $20+2(x-5) = 0$, $x-5 = -10$, $x = -5$. Следовательно, точка C имеет координаты $x = -5$, $y = 0$, т. е. $C(-5;0)$. ●

4.1.9. Доказать, что три точки $(2;3)$, $(5;7)$, $(11;15)$ лежат на одной прямой.

4.1.10. Разделить отрезок между точками $(0;2)$ и $(8;0)$ в таком же отношении, в каком находятся расстояния этих точек от начала координат.

4.1.11. На оси ординат найти точку, отстоящую от точки $A(3;-8)$ на расстоянии 5 единиц.

Дополнительные задачи

4.1.12. Найти длину вектора $\overline{AB}$, соединяющего точки $A(-4;5)$ и $B(-6;7)$, и угол между этим вектором и положительным направлением оси Ox.

4.1.13. Отрезок с концами $A(1;-5)$ и $B(4;3)$ разделен на три равные части. Найти координаты точек деления.

4.1.14. Найти координаты центра тяжести однородной пластинки, имеющей форму треугольника с вершинами в точках $A(x_1;y_1)$,

$B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$ (центр тяжести треугольника находится в точке пересечения его медиан).

4.1.15. Центр тяжести треугольника ABC лежит на оси Ox. Найти координаты вершины C, зная координаты вершин $A(3; 1)$ и $B(1; -3)$; площадь треугольника равна 3.

4.1.16. На оси абсцисс найти точку M, расстояние от которой до точки $A(1; 4)$ равно 5.

4.1.17. Найти координаты точки, одинаково удаленной от осей координат и от координаты точки $A(1; 8)$.

4.1.18. Определить, есть ли среди внутренних углов треугольника с вершинами $A(1; 1)$, $B(0; 2)$ и $C(2; -1)$ тупой угол.

4.1.19. Даны вершины треугольника: $A(7; 2)$, $B(1; 9)$, $C(-8; -11)$. Найти расстояние от точки O пересечения медиан треугольника до вершины B.

4.1.20. Две противоположные вершины квадрата находятся в точках $A(3; 5)$ и $C(1; -3)$. Найти его площадь.

4.1.21. Найти площадь четырехугольника с вершинами $A(-3; 2)$, $B(3; 4)$, $C(6; 1)$, $D(5; -2)$.

4.1.22. Даны вершины треугольника $A(-3; 6)$, $B(9; -10)$, $C(-5; 4)$. Найти координаты центра и радиус описанного около него круга.

4.1.23. Даны вершины $A(2; 1)$, $B(-2; -2)$, $C(-8; 6)$ треугольника ABC. Найти длину высоты, опущенной из вершины B.

4.1.24. Даны две смежные вершины параллелограмма $A(-2; 6)$, $B(2; 8)$ и точка пересечения его диагоналей $M(2; 2)$. Найти координаты двух других вершин.

4.1.25. Даны середины сторон треугольника $M(-1; 5)$, $N(1; 1)$, $P(4; 3)$. Найти координаты его вершин.

4.1.26. В треугольнике с вершинами $O(0; 0)$, $A(8; 0)$, $B(0; 6)$ определить длину медианы OC и биссектрисы OD.

4.1.27. Отрезок с концами $A(-8; -8)$ и $B(-2; -4)$ разделен на четыре равные части. Найти координаты точек деления. До какой точки надо продолжить отрезок AB, чтобы его длина увеличилась в 3 раза?

4.1.28. Даны точки $A(1; 2)$ и $B(4; 4)$. На оси Ox найти точку C так, чтобы площадь треугольника ABC была равна 5.

4.1.29. Даны две противоположные вершины квадрата $A(3; 0)$ и $C(-4; 1)$. Найти координаты двух его других вершин.

4.1.30. Дан треугольник с вершинами $A(-\sqrt{3}; 1)$, $B(0; 2)$, $C(-2\sqrt{3}; 2)$. Найти его внешний угол при вершине A.

4.1.31. Прямая проходит через точки $A(2; -3)$ и $B(-6; 5)$. На этой прямой найти абсциссу точки, ордината которой равна -5.

4.1.32. Определить центр тяжести однородной пластинки, изображенной на рисунке 15.

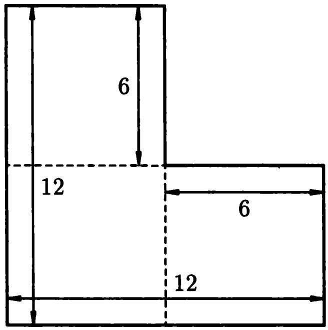

Рис. 15

4.1.33. Определить площадь параллелограмма, три вершины которого — точки $A(-2;3)$, $B(4;-5)$, $C(-3;1)$.

Контрольные вопросы и более сложные задачи

4.1.34. В точках $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$, $M_3(x_3;y_3)$ помещены массы m_1, m_2, m_3 соответственно. Найти центр тяжести системы.

Указание. центр тяжести системы двух масс делит отрезок на части, обратно пропорциональные массам, сосредоточенным на концах отрезка.

4.1.35. Найти положение центра тяжести проволочного треугольника, вершины которого расположены в точках (0;0), (0;3) и (4;0).

4.1.36. Даны вершины однородной треугольной пластинки $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$. Если соединить середины ее сторон, то образуется новая треугольная пластинка. Доказать, что центры тяжести обеих платинок совпадают.

4.1.37. Даны две смежные вершины квадрата $A(2;-1)$ и $B(-1;3)$. Найти координаты двух его других вершин.

4.1.38. Найти координаты центра правильного шестиугольника, зная две его смежные вершины: $A(2;0)$ и $B(5;3\sqrt{3})$.

4.1.39. Показать, что точки $A(-3;8)$, $B(1;5)$ и $C(4;1)$ могут служить тремя вершинами ромба, вычислить площадь этого ромба.

4.1.40. Прямая линия отсекает на оси Ox отрезок $OA = 4$ и на оси Oy отрезок $OB = 7$. Найти координаты основания перпендикуляра, опущенного из начала координат на данную прямую.

Указание. $\lambda = \frac{16}{49}$.