

- 4.1.41.** В каких четвертях могут быть расположены точки  $M(x; y)$ , если
- 1)  $xy > 0$ ;
  - 2)  $xy < 0$ ;
  - 3)  $x - y = 0$ ;
  - 4)  $x - y > 0$ ;
  - 5)  $x + y = 0$ ?
- 4.1.42.** Проведен отрезок от точки  $A(1; -1)$  до точки  $(-4; 5)$ . Найти координаты точки, до которой нужно продлить его в том же направлении, чтобы длина его удвоилась?
- 4.1.43.** Доказать, что во всяком прямоугольном треугольнике длина медианы, соединяющей вершину прямого угла с серединой гипотенузы, равна половине гипотенузы.
- 4.1.44.** Точки  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  служат смежными вершинами ромба, диагонали которого параллельны осям координат. Как выразить координаты остальных вершин через координаты данных точек?
- 4.1.45.** Как расположены точки, имеющие одну и ту же проекцию на ось  $Ox$ ? на ось  $Oy$ ?

## Полярная система координат

⇒ *Полярная система координат* задается точкой  $O$ , называемой *полюсом*, лучом  $Op$ , называемым *полярной осью*, и *единичным вектором*  $\vec{e}$  того же направления, что и луч  $Op$ .

Положение точки  $M$  на плоскости определяется двумя числами: ее расстоянием  $r$  от полюса  $O$  и углом  $\varphi$ , образованным отрезком  $OM$  с полярной осью (рис. 16) и отсчитываемым в положительном направлении.

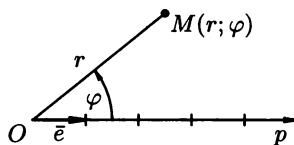


Рис. 16

⇒ Числа  $r$  и  $\varphi$  называются *полярными координатами* точки  $M$ :  $r$  называют *полярным радиусом*,  $\varphi$  — *полярным углом*.

Если рассматривать значения  $r$  в промежутке  $[0; +\infty)$ , а значения  $\varphi$  в  $(-\pi; \pi]$  (или в  $[0; 2\pi)$ ), то каждой точке плоскости (кроме  $O$ ) соответствует единственная пара чисел  $r$  и  $\varphi$ , и наоборот.

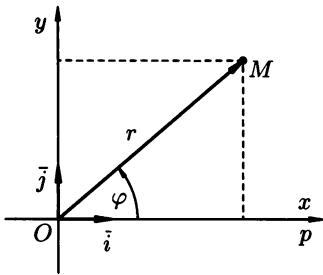


Рис. 17

Если совместить полюс  $O$  с началом координат системы  $Oxy$ , а полярную ось — с положительной полуосью  $Oxy$  (рис. 17), то связь между полярными и прямоугольными координатами точки (кроме точки  $O$ ) устанавливается формулами:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \quad (1.5)$$

и

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{cases} \quad (1.6)$$

Откуда, в частности,  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$ , где  $x \neq 0$ .

- 4.1.46.** Найти прямоугольные координаты точки  $M$  с полярными координатами  $(2; -\frac{2}{3}\pi)$ .

● Имеем  $r = 2$ ,  $\varphi = -\frac{2}{3}\pi$ . По формулам (1.5) находим  $x = 2 \cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$ ,  $y = 2 \sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3}$ . Итак,  $M(-1; -\sqrt{3})$ . ●

- 4.1.47.** Найти прямоугольные координаты точек  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  для которых известны полярные координаты:  $A(3; 0)$ ,  $B\left(2; -\frac{\pi}{3}\right)$ ,

$C\left(5; \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $D\left(0; -\frac{\pi}{4}\right)$ ,  $E\left(1; \frac{2}{3}\pi\right)$ .

- 4.1.48.** Найти полярные координаты точки  $M$  с прямоугольными координатами  $(-\sqrt{3}; -1)$ .

● Имеем  $x = -\sqrt{3}$ ,  $y = -1$ . По формулам (1.6) находим  $r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$ ,  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Точка  $M$  лежит в III четверти, следовательно, с учетом того, что  $-\pi < \varphi \leq \pi$ , получаем  $\varphi = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5}{6}\pi$ . Итак,  $M\left(2; -\frac{5}{6}\pi\right)$ . ●

- 4.1.49.** Найти полярные координаты точек  $A, B, C, D, E$  для которых известны прямоугольные координаты:  $A(-3; 3)$ ,  $B(0; -5)$ ,  $C(-2; -2)$ ,  $D(-4; 0)$ ,  $E(2\sqrt{3}; 2)$ .
- 4.1.50.** В полярной системе координат заданы точки  $M_1(r_1; \varphi_1)$ ,  $M_2(r_2; \varphi_2)$ . Найти:
- расстояние между точками  $M_1$  и  $M_2$ ;
  - площадь треугольника  $OM_1M_2$  ( $O$  — полюс).
- а) Воспользуемся формулами (1.1) и (1.5):

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \\ &= \sqrt{(r_2 \cos \varphi_2 - r_1 \cos \varphi_1)^2 + (r_2 \sin \varphi_2 - r_1 \sin \varphi_1)^2} = \\ &= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2)} = \\ &= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}, \end{aligned}$$

т. е.  $d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$ ;

б) пользуясь формулой для площади треугольника со сторонами  $a$  и  $b$  и углом  $\alpha$  между ними ( $S = \frac{1}{2}ab \sin \alpha$ ), находим площадь треугольника  $OM_1M_2$ :

$$S = \frac{1}{2}r_1 r_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1). \quad ●$$

- 4.1.51.** Сторона правильного шестиугольника равна 1. Приняв за полюс одну из его вершин, а за полярную ось — сторону, через нее проходящую, найти полярные координаты остальных пяти вершин.
- 4.1.52.** В полярной системе координат точка пересечения диагоналей параллелограмма  $ABCD$  совпадает с полюсом. Зная вершины  $A\left(3; -\frac{4}{9}\pi\right)$  и  $B\left(5; \frac{3}{4}\pi\right)$ , найти другие вершины параллелограмма.

## Дополнительные задачи

- 4.1.53.** В полярной системе координат даны две противоположные вершины квадрата  $A\left(2; -\frac{\pi}{3}\right)$  и  $C\left(2; \frac{2}{3}\pi\right)$ . Найти его площадь.
- 4.1.54.** Одна из вершин треугольника лежит в полюсе полярной системы координат, а другие в точках  $A(2; 0)$  и  $B\left(4; \frac{\pi}{3}\right)$ . Найти радиус вписанной в треугольник окружности.
- 4.1.55.** В полярной системе координат даны точки  $A\left(8; -\frac{2}{3}\pi\right)$  и  $B\left(6; \frac{\pi}{3}\right)$ . Найти полярные координаты середины отрезка, соединяющего эти точки.