4.1.56. Треугольник ABC задан полярными координатами вершин: $A\left(5; \frac{\pi}{2}\right)$, $B\left(8; \frac{5}{6}\pi\right)$, $C\left(3; \frac{7}{6}\pi\right)$. Доказать, что он равнобедренный.

4.1.57. Найти полярные координаты точек, симметричных точкам $\left(2; \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(1; -\frac{\pi}{3}\right)$, $(3; 0)$ относительно

а) полюса,

б) полярной оси.

4.1.58. В полярной системе координат даны две смежные вершины квадрата $A\left(2; -\frac{\pi}{4}\right)$ и $B\left(3; \frac{3}{4}\pi\right)$. Найти его площадь.

4.1.59. В полярной системе координат даны две вершины правильного треугольника: $A\left(5; \frac{\pi}{4}\right)$, $B\left(8; -\frac{\pi}{12}\right)$. Найти его площадь.

4.1.60. Найти площадь треугольника, вершины которого $A\left(3; \frac{\pi}{8}\right)$, $B\left(8; \frac{7}{24}\pi\right)$, $C\left(6; \frac{5}{8}\pi\right)$ заданы в полярных координатах.

Контрольные вопросы и более сложные задачи

4.1.61. Как расположены точки, полярные координаты которых удовлетворяют уравнению:

а) $r = 2$;

б) $\varphi = -\frac{\pi}{9}$;

в) $\varphi = 0$?

4.1.62. Каковы координаты точки B полярной оси, отстоящей от точки $A\left(7\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}\right)$ на 7 единиц?

4.1.63*. Построить множество точек плоскости, полярные координаты которых удовлетворяют уравнению:

а) $r = 2\varphi$;

б) $r = 2\sin\varphi$;

в) $r = \dfrac{2}{\cos\varphi}$;

г) $r\sin\varphi = 1$;

д) $\operatorname{tg}\varphi = -1$.

Уравнение линии (кривой) на плоскости

⇛ *Уравнением линии (кривой)* на плоскости Oxy называется уравнение $F(x; y) = 0$, которому удовлетворяют координаты x и y каждой точки этой линии и только они. Переменные x и y в уравнении линии называются *текущими координатами* точек линии.

Задача о нахождении точек пересечения двух линий, заданных уравнениями $F_1(x, y) = 0$ и $F_2(x, y) = 0$, сводится к решению системы двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} F_1(x; y) = 0, \\ F_2(x; y) = 0. \end{cases} \tag{1.7}$$

Аналогично вводится понятие уравнения линии в полярной системе координат: $F(r; \varphi) = 0$.

Линию на плоскости можно рассматривать как траекторию пути, пройденного точкой, движущейся по какому-нибудь закону. Если абсцисса точки $M(x; y)$ изменяется по закону $x = x(t)$, а ордината — по закону $y = y(t)$, где t — переменная, называемая *параметром*, то уравнение линии записывается в виде

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \qquad t \in [t_1; t_2].$$

Эти уравнения называются *параметрическими уравнениями линии.*

Линию на плоскости можно задать *векторным уравнением* $\bar{r} = \bar{r}(t)$, где t — скалярный параметр: при изменении t конец вектора $\bar{r} = \bar{r}(t)$ описывает некоторую линию, называемую *годографом* (см. рис. 18). Параметрические уравнения годографа: $x = x(t)$, $y = y(t)$.

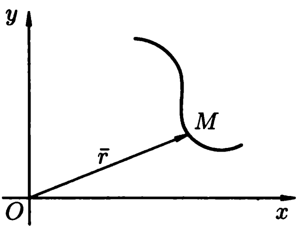

Рис. 18

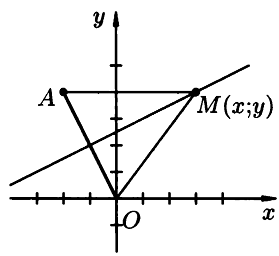

Рис. 19

4.1.64. Описать уравнением множество всех точек плоскости, равноудаленных от начала координат и от точки $A(-2; 4)$.

◐ Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка искомого множества точек плоскости. Тогда согласно условию задачи, $|MA| = |MO|$, где $O(0; 0)$ — начало координат (рис. 19). По формуле (1.1) находим $|MA|$ и $|MO|$: $|MA| = \sqrt{(x+2)^2 + (y-4)^2}$, $|MO| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Имеем $\sqrt{(x+2)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$, т. е. $x^2 + 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 = x^2 + y^2$, откуда $4x - 8y + 20 = 0$. Окончательно получим $x - 2y + 5 = 0$. Это уравнение прямой, перпендикулярной отрезку OA и делящей этот отрезок пополам. ●

4.1.65. Составить уравнение линии, точки которой равноотстоят от двух заданных точек $A(-2;0)$ и $B(4;2)$.

4.1.66. Найти геометрическое место точек, одинаково удаленных от прямой $x=2$ и точки $F(4;0)$.

4.1.67. Стержень AB скользит своими концами по координатным осям. Точка M делит стержень на две части $AM=a$ и $BM=b$. Найти параметрические уравнения траектории точки M, приняв в качестве параметра угол $t=\angle OBA$.

❍ Рассмотрим треугольник MCB (рис. 20): в нем $|CB|=b\cos t$, $|CM|=b\sin t$. Очевидно, $|OB|=(a+b)\cos t$. Стало быть, $x=$ $=|OB|-|CB|=(a+b)\cos t-b\cos t=a\cos t$, $y=|MC|=b\sin t$. Таким образом, получаем уравнения искомой линии

$$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t, \end{cases} \qquad t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right].$$

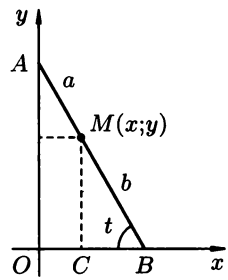

Рис. 20

Уравнение траектории точки M можно записать в виде $F(x;y)=0$. Для этого перепишем найденные уравнения линии в виде $\frac{x}{a}=\cos t$, $\frac{y}{b}=\sin t$. Возводя в квадрат полученные равенства и складывая их почленно, получаем

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Линия, определяемая этим уравнением, называется *эллипсом*. ●

4.1.68. Составить уравнение линии, для каждой точки которой расстояние до оси Ox в три раза меньше, чем до оси Oy.

4.1.69. Найти уравнение траектории перемещения точки M, которая движется так, что расстояние от нее до точки $M_0(2;-3)$ всегда равно 5.

4.1.70. В полярной системе координат составить уравнение окружности диаметра a, если полюс системы координат лежит на окружности, а полярная ось проходит через ее центр.

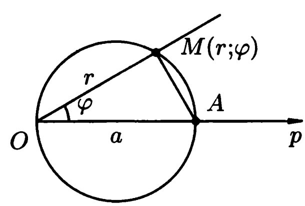

Рис. 21

❍ Пусть $M(r;\varphi)$ — произвольная точка данной окружности. Рассмотрим ΔOMA (см. рис. 21).

В нем $|OM| = r$, $\angle MOA = \varphi$, $\angle OMA = \frac{\pi}{2}$ (вписанный угол, опирающийся на диаметр). Поэтому $\cos\varphi = \frac{r}{a}$. Отсюда находим $r = a\cos\varphi$ — искомое уравнение окружности. ●

4.1.71. Составить параметрические уравнения окружности. В качестве параметра t использовать угол между осью Ox и вектором $\overline{OM}$.

4.1.72. Составить уравнение окружности радиуса R, центр которой лежит на прямой, перпендикулярной полярной оси, а полюс системы координат лежит на окружности.

4.1.73. Луч выходит из полюса и наклонен к полярной оси под углом $\frac{\pi}{6}$. Составить уравнение этого луча в полярных координатах.

4.1.74. Дана окружность $x^2+y^2=9$. Лежат ли на ней точки $M_1(2\sqrt{2};1)$, $M_2(2;3)$? Пересекается ли эта окружность с прямой $y = 3$?

◌ Подставляем координаты точки M_1 в уравнение окружности. Получаем тождество $(2\sqrt{2})^2 + 1 = 9$. Значит точка M_1 лежит на окружности. Точка M_2 не лежит на окружности, т.к. $2^2 + 3^2 \neq 9$.

Для ответа на второй вопрос решим систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ y = 3, \end{cases}$$

откуда получаем $x = 0$, $y = 3$. Таким образом, окружность и прямая имеют одну общую точку $(0;3)$ — прямая касается окружности. ●

4.1.75. Указать какие из данных точек $A_1(1;1)$, $A_2(2;2)$, $A_3(\sqrt{3};-1)$, $A_4\left(-\frac{1}{2};\frac{9}{4}\right)$ лежат на кривой $y = 2 - x^2$.

4.1.76. Найти точки пересечения кривой $y = 6 + 5x - x^2$ с осями координат.

4.1.77. Найти точки пересечения линий $x + 7y = 25$ и $x^2 + y^2 = 25$.

4.1.78. На окружности $x^2 + y^2 = 25$ найти точки:

а) с абсциссой $x = 3$;

б) с ординатой $y = y_0$.

Дополнительные задачи

4.1.79. В прямоугольных координатах даны параметрические уравнения кривых:

а) $\begin{cases} x = 2t, \\ y = t + 1, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$

б) $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 3\sin t, \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi).$

в) $\begin{cases} x = t^2 - 2t + 1, \\ y = t - 1, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$

Найти уравнения заданных кривых в виде $F(x; y) = 0$.

4.1.80. Написать уравнение кривой, сумма расстояний от каждой точки которой до точек $F_1(-2; 0)$ и $F_2(2; 0)$ равна $2\sqrt{5}$.

4.1.81. Вывести уравнение геометрического места точек, для которых модуль разности растояний до точек $F_1(-4; 0)$ и $F_2(4; 0)$ равен 4.

Контрольные вопросы и более сложные задачи

4.1.82. Найти уравнение множества точек, произведение расстояний от которых до двух данных точек $F_1(a; 0)$ и $F_2(-a; 0)$ есть величина постоянная, равная a^2. Полученное уравнение записать в полярных координатах.

4.1.83. Окружность радиуса a катится без скольжения по оси абсцисс из начала координат. Найти параметрические уравнения кривой, описанной точкой окружности, которая при начальном положении совпадала с началом координат. (За параметр t взять угол поворота радиуса окружности.)

4.1.84. Отрезок AB длины $2a$ скользит своими концами по сторонам прямого угла. Из вершины этого угла на этот отрезок опущен перпендикуляр OC. Найти уравнение кривой, описанной основанием таких перпендикуляров. (Поместить полюс O в вершину прямого угла, полярную ось направить по стороне угла.)

4.1.85. Составить уравнение геометрического места центров окружностей, касающихся оси Ox и проходящих через точку $A(2; 3)$.

4.1.86. Прямая перемещается так, что треугольник, образованный ею с осями координат, меняется, но сохраняет постоянную площадь S. Найти траекторию движения середины отрезка, отсекаемого осями координат на этой прямой.

4.1.87. Изобразить множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки A (фокуса) и данной прямой (директрисы). Составить уравнение кривой, обозначив через p расстояние от фокуса до директрисы (систему координат выбрать так как указано на рис. 22).

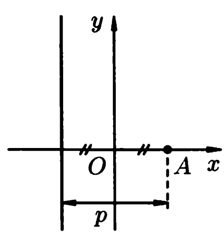

Рис. 22

4.1.88. Какие геометрические образы соответствуют уравнениям:

а) $2xy = 0$;

б) $x^2 + xy = 0$;

в) $x^2 + y^2 = 0$?