4.1.89. Проходит ли линия, заданная уравнением

$$x^2 + 4xy + 6y^2 - 2x + 2y = 0$$

через начало координат?

4.1.90. Изобразить фигуру, заданную уравнением:

1) $x + y = 1$;
2) $|x| + |y| = 1$;
3) $x^2 + y^2 = 0$;
4) $\frac{x}{|x|} = \frac{y}{|y|}$;
5) $x + |x| = y + |y|$.

4.1.91. Симметрична ли фигура, заданная уравнением $(x^2 + y^2 + y)^2 = x^2 + y^2$ относительно оси Oy? оси Ox?

4.1.92. Какая линия определяется параметрическими уравнениями:

1) $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^2, \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = 3 - t, \\ y = t - 4? \end{cases}$

§ 2. ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

Различные виды уравнения прямой

Каждая *прямая* на плоскости Oxy определяется линейным *уравнением первой степени с двумя неизвестными.* Обратно: каждое линейное уравнение первого порядка с двумя неизвестными определяет некоторую прямую на плоскости.

1. *Уравнение прямой с угловым коэффициентом* имеет вид

$$y = kx + b, \tag{2.1}$$

где k — угловой коэффициент прямой (т. е. тангенс угла α, который прямая образует с положительным направлением оси Ox, $k = \operatorname{tg} \alpha$), b — ордината точки пересечения прямой с осью Oy.

2. *Общее уравнение прямой*:

$$Ax + By + C = 0, \tag{2.2}$$

где A, B и C — постоянные коэффициенты, причем A и B одновременно не обращаются в нуль ($A^2 + B^2 \neq 0$).

Заметим, что $\bar{n} = (A; B)$ — нормальный вектор прямой ($\bar{n}$ перпендикулярен прямой). Частные случаи этого уравнения:

$Ax + By = 0$ ($C = 0$) — прямая проходит через начало координат;
$Ax + C = 0$ ($B = 0$) — прямая параллельна оси Oy;
$By + C = 0$ ($A = 0$) — прямая параллельна оси Ox;

$Ax = 0$ $(B = C = 0)$ — прямая совпадает с осью Oy;
$By = 0$ $(A = C = 0)$ — прямая совпадает с осью Ox.

3. *Уравнение прямой в отрезках*:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \tag{2.3}$$

где a и b — длины отрезков (с учетом знаков), отсекаемых прямой на осях Ox и Oy соответственно (рис. 23).

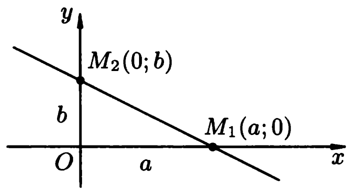

Рис. 23

4. *Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении*:

$$y - y_0 = k(x - x_0), \tag{2.4}$$

где $k = \operatorname{tg}\alpha$ (α — угол, образуемый прямой с осью Ox); $(x_0; y_0)$ — координаты данной точки. Уравнение (2.4) называют также *уравнением пучка прямых с центром в точке* $(x_0; y_0)$; *уравнение пучка прямых, проходящих через точку пересечения двух прямых* $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ имеет вид

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0, \tag{2.5}$$

где λ — числовой множитель.

5. *Уравнение прямой, проходящей через две данные точки* $M_1(x_1; y_1)$ *и* $M_2(x_2; y_2)$, где $y_1 \neq y_2$, $x_1 \neq x_2$ имеет вид

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \tag{2.6}$$

Угловой коэффициент прямой, проходящей через две данные точки, определяется по формуле

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{2.7}$$

Если $x_1 = x_2$, то уравнение прямой (2.6) имеет вид $x = x_1$; если $y_1 = y_2$, то: $y = y_1$.

6. *Нормальное уравнение прямой*:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0, \tag{2.8}$$

где p — длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, α — угол, который этот перпендикуляр образует с положительным направлением оси Ox (рис. 24).

Общее уравнение прямой (2.2) можно преобразовать в нормальное уравнение (2.8) путем умножения на *нормирующий множитель* $\lambda = \dfrac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$; знак перед дробью берется противоположным знаку свободного члена C (в общем уравнении прямой).

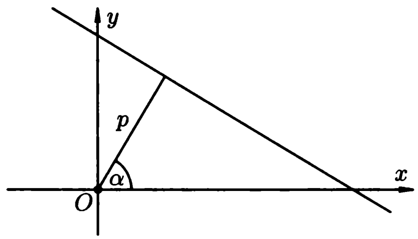

Рис. 24

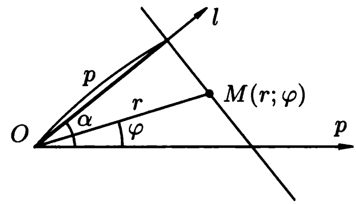

Рис. 25

7. *Уравнение прямой* в полярных координатах имеет вид

$$r\cos(\varphi-\alpha)=p, \qquad (2.9)$$

r, φ, α, p — изображены на рисунке 25 (полярная система координат).

4.2.1. Построить прямую, заданную уравнением $2x-y-4=0$.

◐ 1. Для построения прямой достаточно знать координаты двух ее произвольных точек. Полагая в уравнении прямой, например, $x=0$, получим $y=-4$. Имеем одну точку $A(0;-4)$. Полагая $x=1$, получим $y=-2$. Отсюда вторая точка $B(1;-2)$. Осталось построить точки A и B и провести через них прямую (рис. 26).

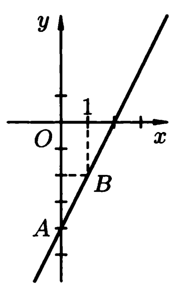

Рис. 26

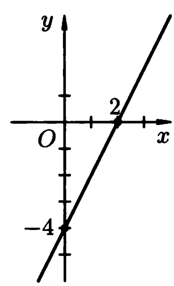

Рис. 27

2. Задачу можно решить иначе, используя уравнение прямой в отрезках. Приведем уравнение к виду (2.3). Для этого перенесем свободный член (-4) в правую часть уравнения и обе его части разделим на 4. Получаем $2x-y=4$, $\frac{2x}{4}-\frac{y}{4}=1$,

т. е. $\frac{x}{2}+\frac{y}{-4}=1$ — уравнение прямой в отрезках на осях. На оси Ox отложим 2 единицы вправо (от начала координат); на оси Oy отложим 4 единицы вниз. Получаем две точки на осях, через которые проводим прямую (рис. 27). ●

4.2.2. Записать уравнение прямой $y = 2x - 3$ в отрезках и построить ее.

4.2.3. Определить при каком значении α прямая $(\alpha^2-\alpha)x+(2+\alpha)y - 3\alpha + 1 = 0$

а) параллельна оси Ox;

б) проходит через начало координат.

4.2.4. Найти k из условия, что прямая $y = kx + 2$ удалена от начала координат на расстояние $\sqrt{3}$.

4.2.5. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A\left(-2; \frac{2}{5}\right)$ и образующей с осью Ox угол, равный $\operatorname{arctg} 3$.

4.2.6. Уравнение прямой $4x - 3y + 12 = 0$ представить в различных видах (с угловым коэффициентом, в отрезках, в виде нормального уравнения).

○ Для получения уравнения прямой с угловым коэффициентом разрешим заданное уравнение относительно y. Получим $3y = 4x + 12$ и далее $y = \frac{4}{3}x + 4$ — уравнение прямой с угловым коэффициентом; здесь $k = \frac{4}{3}$, $b = 4$.

Для получения уравнения прямой в отрезках перенесем свободный член $C = 12$ вправо и разделим обе части уравнения на -12. В результате получим $\frac{x}{-3}+\frac{y}{4}=1$ — уравнение в отрезках на осях; здесь $a = -3$, $b = 4$.

Приведем исходное уравнение к нормальному виду (2.8). Для этого умножим обе части уравнения $4x-3y+12=0$ на нормирующий множитель $\lambda = \frac{1}{-\sqrt{4^2+(-3)^2}}$, т. е. $\lambda = -\frac{1}{5}$. Перед корнем взят знак «минус», т. к. свободный член ($C = 12$) имеет знак «плюс». Получим $-\frac{1}{5}(4x-3y+12)=0$, т. е. $-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-\frac{12}{5}=0$; здесь $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ $\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha = \frac{16}{25}+\frac{9}{25}=1\right)$, $p = \frac{12}{5}$, т. е. расстояние от $O(0;0)$ до прямой равно 2,4. ●

4.2.7. Записать уравнение с угловым коэффициентом, в отрезках и нормальное для заданных прямых и определить на каком расстоянии от начала координат они находятся:

а) $2x - 3y + 6 = 0$;

б) $x + 2{,}5 = 0$;

в) $y = x - 1$;

г) $x + 5y = 0$.

4.2.8. Написать уравнение прямой, проходящей через точки:

а) $A(0;2)$, $B(-3;7)$;

б) $A(2;1)$, $B(4;1)$.

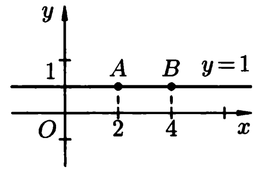

Рис. 28

❍ а) Используем уравнение (2.6). Полагая в нем $x_1=0$, $y_1=2$, $x_2=-3$, $y_2=7$, получим $\frac{y-2}{7-2}=\frac{x-0}{-3-0}$, или $\frac{y-2}{5}=\frac{x}{-3}$, т. е. $-3y+6=5x$ или $5x+3y-6=0$.

б) Решаем аналогично: $\frac{y-1}{1-1}=\frac{x-2}{4-2}$. Так как $y_1=y_2$, заключаем, что $y-1=0$, $y=1$ есть уравнение прямой, проходящей через точки A и B. (Для наглядности построим точки и прямую в системе Oxy — см. рис. 28.) ●

4.2.9. Найти угловой коэффициент к прямой и ординату точки ее пересечения с осью Oy, зная, что прямая проходит через точки $A(1;1)$ и $B(-2;3)$.

4.2.10. Прямая проходит через точки $A(2;3)$ и $B(-4;-1)$, пересекает ось Oy в точке C. Найти координаты точки C.

4.2.11. Какую абсциссу имеет точка M, лежащая на прямой, проходящей через точки $A(-2;-2)$ и $B(-1;6)$, и имеющая ординату, равную 22?

4.2.12. Из пучка прямых, определяемых уравнением $y+3=k(x-2)$ выделить ту, которая проходит через точку $A(-2;5)$.

❍ Подставим координаты точки A в уравнение прямой: $5+3=k(-2-2)$, получим $k=8:(-4)=-2$. Следовательно, искомое уравнение прямой есть $y+3=-2(x-2)$, т. е. $2x+y-1=0$. ●

4.2.13. Найти прямую, принадлежащую пучку $-4x+2y+1+\lambda(x-3y+2)=0$ и проходящую через точку $A(1;0)$ и написать ее уравнение.

4.2.14. Составить уравнение прямой в полярных координатах, если известно, что она проходит через точку $M\left(2;\frac{\pi}{3}\right)$ и наклонена к полярной оси под углом $\frac{2}{3}\pi$.

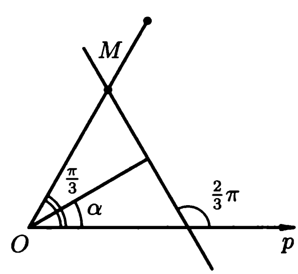

Рис. 29

❍ Воспользуемся уравнением (2.9). Очевидно (см. рис. 29) $\alpha=\frac{\pi}{2}-\left(\pi-\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$. Тогда $p=2\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=$

$= 2\cos\frac{\pi}{6} = 2\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, т. е. $p = \sqrt{3}$. Следовательно, уравнение искомой прямой есть $r\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$. ●

4.2.15. Найти уравнение прямой:

а) образующей с осью Ox угол $\frac{\pi}{3}$ и пересекающей ось Oy в точке $(0; -6)$;

б) параллельной оси Ox и отсекающей на оси Oy отрезок, равный 2;

в) отсекающей на осях координат отрезки, равные 3 и 4.

Дополнительные задачи

4.2.16. Составить уравнение прямой, если точка $M(4; 2)$ является серединой ее отрезка, заключенного между осями координат.

4.2.17. Составить уравнение прямой, отсекающей на положительных полуосях координат равные отрезки, если длина отрезка, заключенного между осями координат, равна $7\sqrt{2}$.

4.2.18. Луч света, пройдя через точку $A(2; 3)$ под углом α к оси Ox, отразился от нее и прошел через точку $B(-5; 4)$. Найти угол α.

4.2.19. Луч света направлен по прямой $x - y - 1 = 0$. Определить точку встречи луча с осью Ox и уравнение прямой, по которой направлен отраженный луч.

4.2.20. При каких значениях α и β прямая $(\alpha - \beta)x + (2\alpha + \beta)y - 1 = 0$ отсекает на оси Ox отрезок, равный $\frac{1}{7}$, а на оси Oy — отрезок, равный $\frac{1}{2}$ (единиц масштаба).

4.2.21. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(4; 4)$ и отсекающей от координатного угла треугольник площадью $S = 4$.

4.2.22. Составить уравнение биссектрисы внутреннего угла A треугольника ABC с вершинами $A(1; -2)$, $B(5; 4)$, $C(-2; 0)$.

4.2.23. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(3; -4)$, являющуюся основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую.

4.2.24. Дан треугольник с вершинами $A(3; 2)$, $B(3; 8)$, $C(6; 2)$. Написать уравнения сторон треугольника.

4.2.25. Составить уравнение прямой, зная, что расстояние от нее до начала координат равно $\sqrt{2}$, а угол между перпендикуляром, опущнным из начала координат на прямую, и осью Ox, равен $\frac{3}{4}\pi$.

4.2.26. Найти площадь треугольника, заключенного между осями координат и прямой $2x - 5y + 10 = 0$.

4.2.27. Составить (в полярных координатах) уравнение прямой, проходящей через точки $M_1\left(4; \frac{\pi}{2}\right)$ и $M_2(4; 0)$.

4.2.28. Равнобедренная трапеция с основаниями 10 и 4 имеет острый угол $\frac{\pi}{4}$. Написать уравнение сторон трапеции, приняв за ось Ox большее основание, за ось Oy — ось симметрии трапеции.

4.2.29. Через середину отрезка AB, где $A(4; 0)$, $B(0; 6)$, провести прямую, отсекающую на оси Ox отрезок вдвое больший, чем на оси Oy и написать ее уравнение.

4.2.30. Написать уравнение прямой, параллельной биссектрисе второго координатного угла и отсекающей на оси Oy отрезок, равный 3.

4.2.31. При каком значении C прямая $2x - 3y + C = 0$ пересекает ось Oy в точках с ординатами $b_1 = 2$; $b_2 = -3$?

4.2.32. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(2; -1)$ и параллельной биссектрисе второго координатного угла.

4.2.33. Найти прямую, проходящую через точку пересечения прямых $x - 2y + 3 = 0$ и $2x + y + 5 = 0$ и параллельную оси ординат и написать ее уравнение.

4.2.34. Через точку пересечения прямых $x + y - 6 = 0$ и $2x + y - 13 = 0$ провести прямую (не совпадающую с данными), отсекающую на осях равные отрезки и написать ее уравнение.

4.2.35. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $M(2; -6)$ и отсекает на осях Ox и Oy отрезки одинаковой длины (считая каждый отрезок направленным от начала координат).

4.2.36. Через точку $M(4; 3)$ проведена прямая, отсекающая от координатного угла треугольник, площадь которого равна 3. Найти точки пересечения этой прямой с осями координат.

Контрольные вопросы и более сложные задачи

4.2.37. Даны две точки $M_1(-3; 8)$ и $M_2(2; 2)$. На оси абсцисс найти такую точку M, чтобы ломаная M_1MM_2 имела наименьшую длину.

4.2.38. Из точки $A(-5; 6)$ выходит луч света под углом $\operatorname{arctg}(-2)$ к оси Ox и отражается от оси Ox, затем от оси Oy. Найти уравнения прямых, по которым направлены все три луча.

4.2.39. Доказать, что условие принадлежности трех точек $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, $M_3(x_3; y_3)$ одной прямой можно записать в виде
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

4.2.40. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $x + y - 1 = 0$ и $x + 2y + 1 = 0$ и отсекающей на отрицательной части оси Oy отрезок, равный 2.

4.2.41. Какова должна быть зависимость между коэффициентами A и B, чтобы прямая $Ax + By + C = 0$ была наклонена к оси Ox под углом $\frac{3}{4}\pi$?

4.2.42. Найти уравнение прямой, содержащей биссектрису острого угла, образованного прямыми $y = \sqrt{3}x + 4$ и $y = 4$.

4.2.43. При каком значении α прямая $x + y + \alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0$ проходит через начало координат?

4.2.44. Является ли уравнение $|x| + |y| = 0$ уравнением прямой?

4.2.45. Является ли уравнение $x^2 - y^2 = 0$ уравнением прямой, содержащей биссектрису второго координатного угла?

4.2.46. Под каким углом к положительному направлению оси Ox наклонены прямые $y = 1{,}5x$ и $y = -\sqrt{3}x$?

4.2.47. Какая из прямых $2x - 4y + 3 = 0$ и $x + y = 0$ отсекает на оси ординат отрезок большей длины?

4.2.48. Прямая $y = 3x + b$ пересекает ось Ox в точке с абсциссой $a = 4$. Чему равен параметр b?

4.2.49. Является ли уравнение $\frac{x}{6} - \frac{y}{3} = 1$ уравнением прямой в отрезках? Какие отрезки отсекает она на осях координат?

4.2.50. При каких значениях C площадь, ограниченная координатными осями и прямой $3x + 10y + C = 0$ равна 135 кв.ед.?

4.2.51. Каково уравнение семейства прямых, угловой коэффициент которых равен $-\frac{2}{3}$?

Угол между двумя прямыми, условия параллельности и перпендикулярности двух прямых, пересечение прямых, расстояние от данной точки до данной прямой

Под *углом между прямыми в плоскости* понимают наименьший (острый) из двух смежных углов, образованными этими прямыми.

Если прямые l_1 и l_2 заданы уравнениями с угловыми коэффициентами $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$, то угол φ между ними вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}. \tag{2.10}$$

Условие параллельности прямых l_1 и l_2 имеет вид

$$k_1 = k_2, \tag{2.11}$$

а *условие их перпендикулярности*

$$k_1 = -\frac{1}{k_2} \tag{2.12}$$

(или $k_1 k_2 = -1$).

Если прямые l_1 и l_2 заданы общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то величина φ угла между ними вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}\right|, \tag{2.13}$$

условие их параллельности

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \qquad (\text{или } A_1B_2 - A_2B_1 = 0), \tag{2.14}$$

условие их перпендикулярности

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0. \tag{2.15}$$

Для *нахождения общих точек прямых* l_1 и l_2 необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y = k_1x + b_1, \\ y = k_2x + b_2. \end{cases} \tag{2.16}$$

При этом:

если $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$, то имеется *единственная точка пересечения прямых*;

если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ — прямые l_1 и l_2 не имеют общей точки, т. е. *параллельны*;

если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ — прямые имеют бесконечное множество общих точек, т. е. *совпадают*.

⇛ *Расстоянием* d от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую.

Расстояние d определяется по формуле

$$d = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|. \tag{2.17}$$

Расстояние от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ вычисляется по формуле

$$d = |x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p|. \tag{2.18}$$

4.2.52. Найти угол между прямыми:

1) $y = 2x - 3$ и $y = \frac{1}{2}x + 5$;

2) $2x - 3y + 10 = 0$ и $5x - y + 4 = 0$;

3) $y = \frac{3}{4}x - 2$ и $8x + 6y + 5 = 0$;

4) $y = 5x + 1$ и $y = 5x - 2$.

◐ 1) Воспользуемся формулой (2.10). Подставляя в нее значения $k_1 = 2$ и $k_2 = \frac{1}{2}$, находим $\operatorname{tg}\varphi = \left|\dfrac{\frac{1}{2} - 2}{1 + 2 \cdot \frac{1}{2}}\right| = \dfrac{\left|-\frac{3}{2}\right|}{2} = \dfrac{3}{4}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$ ($\varphi \approx 37°$);

2) Подставим значения $A_1 = 2$, $B_1 = -3$, $A_2 = 5$, $B_2 = -1$ в формулу (2.13): $\operatorname{tg}\varphi = \left|\dfrac{2 \cdot (-1) - 5 \cdot (-3)}{2 \cdot 5 + (-3) \cdot (-1)}\right| = \left|\dfrac{-2 + 15}{10 + 3}\right| = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$;

3) Здесь $k_1 = \frac{3}{4}$, найдем k_2. Для этого перейдем от $6y = -8x - 5$ к эквивалентному равенству $y = -\frac{4}{3}x - \frac{5}{6}$. Здесь $k_2 = -\frac{4}{3}$. Так как $k_1 \cdot k_2 = -1$, то данные прямые (см. (2.12)) перпендикулярны. (По формуле (2.10) получаем: $\operatorname{tg}\varphi = \left|\dfrac{-\frac{4}{3} - \frac{3}{4}}{1 + \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)}\right| = \left|\dfrac{-\frac{25}{12}}{1 - 1}\right| = \infty$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.)

4) $k_1 = 5$, $k_2 = 5$, $\operatorname{tg}\varphi = 0$, $\varphi = 0$. ●

4.2.53. Найти угол между двумя прямыми:

1) $3x + 2y - 1 = 0$ и $5x - y + 4 = 0$;
2) $y = 3{,}5x - 3$ и $7x - 2y + 2 = 0$;
3) $x + 4y + 10 = 0$ и $5y - 3 = 0$;
4) $3x - 2y + 0{,}1 = 0$ и $2x + 3y - 5 = 0$.

4.2.54. Найти угол между прямыми:

а) $x - 2 = 0$ и $x - y + 1 = 0$;
б) $2x - 3y = 0$ и прямой, проходящей через точки $(5; 0)$ и $(0; 3)$.

4.2.55. Исследовать взаимное расположение следующих пар прямых:

1) $3x + 5y - 9 = 0$ и $10x - 6y + 4 = 0$;
2) $2x + 5y - 2 = 0$ и $x + y + 4 = 0$;
3) $2y = x - 1$ и $4y - 2x + 2 = 0$;
4) $x + 8 = 0$ и $2x - 3 = 0$;
5) $\frac{x}{-4} + \frac{y}{2} = 1$ и $y = \frac{1}{2}x + 2$;
6) $x + y = 0$ и $x - y = 0$;
7) $y + 3 = 0$ и $2x + y - 1 = 0$;
8) $y = 3 - 6x$ и $12x + 2y - 5 = 0$;
9) $2x + 3y = 8$ и $x + y - 3 = 0$;
10) $\frac{2}{3}x - \frac{3}{4}y - 1 = 0$ и $\frac{3}{4}x + \frac{2}{3}y + 2 = 0$.

4.2.56. При каких значениях α следующие пары прямых: а) параллельны; б) перпендикулярны?

1) $2x - 3y + 4 = 0$ и $\alpha x - 6y + 7 = 0$;
2) $\alpha x - 4y + 1 = 0$ и $-2x + y + 2 = 0$;

3) $4x + y - 6 = 0$ и $3x + \alpha y - 2 = 0$;

4) $x - \alpha y + 5 = 0$ и $2x + 3y + 3 = 0$.

4.2.57. Через точку пересечения прямых $3x - 2y + 5 = 0$, $x + 2y - 9 = 0$ проведена прямая, параллельная прямой $2x + y + 6 = 0$. Составить ее уравнение.

◐ Найдем сначала точку M пересечения данных прямых. Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - 2y + 5 = 0, \\ x + 2y - 9 = 0. \end{cases}$$

Отсюда $4x = 4$. И далее, $x = 1$, $y = 4$, т.е. $M(1;4)$. Угловой коэффициент прямой $2x + y - 6 = 0$ есть $k_1 = -2$. Следовательно, угловой коэффициент k прямой параллельной данной, есть $k = -2$ (см. (2.11)). По направлению прямой ($k = -2$) и точке $M(1;4)$, ей принадлежащей, запишем уравнение искомой прямой: $y - 4 = -2(x - 1)$, т.е. $2x + y - 6 = 0$. ●

4.2.58. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(-1;2)$:

а) параллельно прямой $y = 2x - 7$;

б) перпендикулярно прямой $x + 3y - 2 = 0$.

4.2.59. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $B(2;-3)$:

а) параллельно прямой, соединяющей точки $M_1(-4;0)$ и $M_2(2;2)$;

б) перпендикулярно прямой $x - y = 0$.

4.2.60. Показать, что уравнение прямой, проходящей через точку $(x_0;y_0)$, и параллельной прямой $Ax + By + C = 0$, имеет вид $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$.

4.2.61. Показать, что уравнение прямой, проходящей через точку $(x_0;y_0)$, и перпендикулярной к прямой $Ax + By + C = 0$, имеет вид $A(x - x_0) - B(y - y_0) = 0$.

4.2.62. Найти координаты точки M_2, симметричной точке $M_1(-3;4)$ относительно прямой $4x - y - 1 = 0$.

◐ Точки M_1 и M_2 лежат на прямой M_1M_2, перпендикулярной прямой $4x - y - 1 = 0$, и одинаково удалены от (см. рис. 30, прямая l). Найдем уравнение прямой M_1M_2. Так как угловой коэффициент k_1 данной прямой равен 4, то угловой коэффициент k прямой M_1M_2 определяется равенствами $k = -\frac{1}{k_1} = -\frac{1}{4}$. Поэтому уравнение прямой M_1M_2 есть

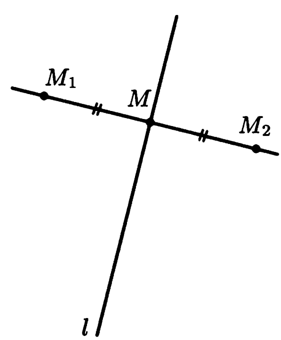

Рис. 30

$y-4=-\frac{1}{4}(x+3)$, т. е. $x+4y-13=0$. Найдем координаты точки M — точка пересечения прямой M_1M_2 и данной прямой:

$$\begin{cases} x+4y-13=0, \\ 4x-y-1=0. \end{cases}$$

Отсюда $x=1$, $y=3$, т. е. $M(1;3)$. Точка $M(1;3)$ делит отрезок M_1M_2 пополам. Из соотношений $1=\frac{-3+x}{2}$ и $3=\frac{4+y}{2}$ находим координаты x и y искомой точки M_2: $x=5$, $y=2$ и $M_2(5;2)$. ●

4.2.63. Точка $A(2;-5)$ является вершиной квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой $x-2y-7=0$. Найти площадь этого квадрата.

4.2.64. Две стороны квадрата лежат на прямых $5x-12y-65=0$ и $5x-12y+26=0$. Найти площадь квадрата.

4.2.65. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(1;2)$ так, чтобы расстояние от этой прямой до точек $M_1(2;3)$ и $M_2(4;-5)$ были бы равны.

4.2.66. Найти геометрическое место точек, расстояние от которых до прямой $5x-12y-13=0$ равно 3.

4.2.67. Написать уравнение прямой l_2, проходящей через точку $A(0;2)$ под углом $\frac{\pi}{4}$ к прямой l_1: $x-2y+3=0$.

◐ Угловой коэффициент прямой l_1 равен $\frac{1}{2}$, т. е. $k_1=\frac{1}{2}$. Обозначим через k угловой коэффициент прямой l_2. Тогда, по формуле (2.10), имеем $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1=\left|\frac{k-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}k}\right|$. Из этого уравнения находим $k_2=3$ и $k_3=-\frac{1}{3}$. Задача имеет два решения. Для каждого случая напишем уравнение прямой, проходящей через точку A в заданном направлении: $y-2=3(x-0)$ и $y-2=-\frac{1}{3}(x-0)$, т. е. $3x-y+2=0$ и $x+3y-6=0$. ●

4.2.68. Найти расстояние между параллельными прямыми $3x+4y-20=0$ и $6x+8y+5=0$.

◐ Возьмем на первой прямой произвольную точку A. Пусть, например, $x=0$, тогда $y=5$, т. е. $A(0;5)$. По формуле (2.17) находим расстояние d от точки A до второй прямой:

$$d=\left|\frac{6\cdot 0+8\cdot 5+5}{\sqrt{6^2+8^2}}\right|=\frac{45}{10}=4{,}5.$$

●

4.2.69. Найти расстояние между прямыми $2x-3y+8=0$ и $4x-6y=10$.

4.2.70. Найти длину высоты BD в треугольнике с вершинами $A(4;-3)$, $B(-2;6)$ и $C(5;4)$.

Дополнительные задачи

4.2.71. Даны уравнения оснований трапеции: $3x-4y-15=0$, $3x-4y-35=0$. Найти длину ее высоты.

4.2.72. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(1;5)$ на расстоянии пяти единиц от начала координат.

4.2.73. Найти координаты точки, равноудаленной от двух точек $(5;4)$ и $(-3;2)$ и лежащей на прямой $x-3y+8=0$.

4.2.74. Даны две вершины треугольника $A(2;-2)$, $B(-6;2)$ и точка $O(1;2)$ пересечения его высот. Найти координаты третьей вершины C.

4.2.75. Составить уравнение прямой, содержащей высоту BD в треугольнике с вершинами $A(-3;2)$, $B(5;-2)$, $C(0;4)$.

4.2.76. Найти координаты проекции точки $A(1;-3)$ на прямую $2x-y+5=0$.

4.2.77. Найти координаты точки, симметричной точке $A(-2;-2)$ относительно прямой $x+y-4=0$.

Контрольные вопросы и более сложные задачи

4.2.78. Составить уравнение прямой, симметричной прямой $x+2y-6=0$ относительно точки $A(4;2)$.

4.2.79. Доказать, что если две прямые параллельны, то их уравнения можно представить в таком виде, что они будут отличаться только свободными членами.

4.2.80. Найти уравнения прямых, на которых лежат биссектрисы углов между прямыми $3x-4y+12=0$ и $5x+12y-2=0$.

4.2.81. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;5)$ на расстоянии 2 единиц от точки $B(0;-1)$.

4.2.82. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(1;-1)$ так, что середина ее отрезка между прямыми $2x-3y-6=0$ и $2x-3y+6=0$ лежала бы на прямой $2x+15y-42=0$.

4.2.83. Две смежные вершины квадрата имеют координаты $(1;4)$ и $(4;5)$. Найти координаты двух других вершин.

4.2.84. Дан треугольник с вершинами $A(4;6)$, $B(-3;0)$, $C(2;-3)$. Найти уравнения прямых, на которых лежат биссектриса AD и высота CE, и величину острого угла между ними.

4.2.85. Можно ли подобрать коэффициенты λ_1 и λ_2 так, чтобы прямые $5x-3y+1=0$ и $\lambda_1 x+\lambda_2 y-2=0$ совпали?

4.2.86. Какой угол образует прямая $\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{y}{3}=1$ с положительным направлением оси Oy? оси Ox?

4.2.87. Какая должна быть зависимость между коэффициентами a и b, чтобы прямая $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ образовала с осью Oy угол 30°? 60°?

4.2.88. Какие из уравнений:

а) $\frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y + 1 = 0$,

б) $\frac{2}{5}x + \frac{1}{3}y - 2 = 0$,

в) $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 3 = 0$,

г) $x - 3{,}2 = 0$,

д) $y + 1 = 0$

являются уравнениями прямых в нормальном виде?

4.2.89. При каком значении α прямая $x + y - \alpha = 0$ касается окружности $x^2 + y^2 = 1$?

4.2.90. Под каким углом к оси Ox надо направить луч из точки $A(2;4)$, чтобы отраженный луч прошел через точку $B(-5;3)$?

4.2.91. Какому условию должны удовлетворять коэффициенты a и b, чтобы прямые $ax + by + 1 = 0$, $x - y + 5 = 0$ и $y = 1$ проходили через одну точку?

4.2.92. При каком значении α прямые $(\alpha + 1)x + (3 - \alpha)y - 8 = 0$ и $(\alpha - 3)x + (2\alpha - 3)y = 0$ взаимно перпендикулярны?

4.2.93. На прямой $2x - y + 4 = 0$ найти точку, координаты которой связаны соотношением $x + y - 7 = 0$.

4.2.94. Каково взаимное положение двух прямых, угловые коэффициенты которых равны $-2{,}5$ и $-0{,}4$?

4.2.95. Как установить, принадлежит ли точка $(x_3;y_3)$ прямой, уравнение которой $Ax + By + C = 0$?

Смешанные задачи на прямую

4.2.96. Найти площадь треугольника, образованного прямыми: $2x + y + 4 = 0$, $x + 7y - 11 = 0$ и $3x - 5y - 7 = 0$.

4.2.97. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2;1)$:

а) параллельно оси Oy;

б) образующей с осью Ox угол $\frac{3}{4}\pi$;

в) перпендикулярно вектору $\bar{a} = (4;2)$;

г) параллельно биссектрисе первого координатного угла;

д) перпендикулярно прямой $6x - y + 2 = 0$;

е) отсекающей на оси Oy отрезок длиной 5.

4.2.98. Через точку пересечения прямых $3x+2y-4=0$ и $x-5y+8=0$ проведены прямые, одна из которых проходит через начало координат, а другая параллельна оси Ox. Составить их уравнения.

4.2.99. Какой угол образует с осью Ox прямая, проходящая через точку $D(1;3)$ и точку пересечения медиан треугольника с вершинами $A(-1;4)$, $B(2;3)$, $C(5;8)$?

4.2.100. Дан четырехугольник $ABCD$ с вершинами $A(3;5)$, $B(6;6)$, $C(5;3)$, $D(1;1)$. Найти:

а) координаты точки пересечения диагоналей;

б) угол между диагоналями.

4.2.101. Луч света, пройдя через точки $A(4;6)$ и $B(5;8)$, упал на прямую $x-2y+2=0$ и отразился от нее. Составить уравнение прямой, по которой направлен отраженный луч.

4.2.102. Известны вершины треугольника $A(-4;-2)$, $B(0;1)$, $C(2;-1)$. Найти расстояние от начала координат до точки пересечения медианы, проведенной из вершины A, с высотой, проведенной из вершины B.

4.2.103. Написать уравнения прямых, на которых лежат стороны треугольника ABC, если задана его вершина $A(1;3)$ и уравнения медиан $x-2y+1=0$ и $y-1=0$.

4.2.104. Найти координаты основания перпендикуляра, опущенного из точки $A(-1;2)$ на прямую $3x-5y-21=0$.

4.2.105. Дан треугольник с вершинами в точках $A(2;5)$, $B(5;-1)$, $C(8;3)$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения медиан треугольника перпендикулярно к прямой $x+y+4=0$.

4.2.106. Известны уравнения прямых, на которых лежат две стороны ромба: $x+2y-4=0$, $x+2y-10=0$ и уравнение одной из его диагоналей $x-y+2=0$. Найти координаты вершин ромба.

4.2.107. Дан треугольник с вершинами в точках $A(1;-2)$, $B(0;5)$, $C(-6;5)$. Найти координаты центра описанной около треугольника окружности.

4.2.108. Даны две вершины равностороннего треугольника ABC: $A(-6;0)$, $B(0;0)$. Найти координаты

а) третьей вершины C;

б) центра вписанной в треугольник окружности.

4.2.109. Найти уравнения прямых, на которых лежат три стороны квадрата, зная, что четвертой стороной является отрезок прямой $4x+3y-12=0$, концы которого лежат на осях координат.

4.2.110. Написать уравнение траектории движения точки $M(x;y)$, движущейся так, что сумма расстояний от нее до прямых $2x-y=0$ и $x+2y=0$ остается постоянной и равной $\sqrt{5}$.

4.2.111. Написать уравнения прямых, на которых лежат стороны треугольника, зная уравнения двух высот: $7x-2y-1=0$ и $2x-7y-6=0$ и вершину $A(3;-4)$.

4.2.112. Даны вершины треугольника $A(2;-2)$, $B(3;5)$; $C(6;1)$. Найти:

1) длины сторон AC и BC;

2) уравнения прямых, на которых лежат стороны BC и AC;

3) уравнение прямой, на которой лежит высота, проведенная из точки B;

10 – 2361