Так как $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z=0$ в любой точке $P(x, y)$, то данная функция непрерывна на всей плоскости xOy.

20. Доказать, что функция $z=xy+y^2$ непрерывна на всей плоскости xOy.

21. Доказать, что функция $z=x\cdot\cos y$ непрерывна в точке $P\left(2; \frac{\pi}{2}\right)$.

22. Исследовать на непрерывность функцию $z=\frac{xy+2}{x^2-y}$.

Решение. Делимое $xy+2$ и делитель x^2-y являются функциями, непрерывными в любой точке плоскости xOy. Заданная функция z терпит разрыв в точках, где $y=x^2$. Следовательно, функция z непрерывна в любой точке плоскости xOy, исключая точки, расположенные на параболе $y=x^2$.

23. Показать, что функция $z=\frac{1}{x^2+y^2}$ имеет разрыв в точке $O(0, 0)$.

24. Исследовать на непрерывность функцию $z=\frac{1}{2x-y}$.

25. Исследовать на непрерывность функцию $z=\frac{1}{4-x^2-y^2}$.

§ 4. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Пусть функция $z=f(x, y)$ непрерывна в некоторой области. Как известно, если x получает приращение Δx, а y сохраняет постоянное значение, то функция z получает частное приращение $\Delta_x z$.

Отношение $\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ выражает среднюю скорость изменения функции z на отрезке PP_1, то есть при перемещении точки $P(x, y)$ в точку $P_1(x+\Delta x, y)$, а $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ дает истинную скорость изменения функции z по аргументу x.

Частной производной по x от функции $z=f(x, y)$ называется предел отношения частного приращения $\Delta_x z$ к приращению Δx при стремлении Δx к нулю.

Частная производная по x от функции $z=f(x, y)$ обозначается одним из символов $\frac{\partial z}{\partial x}$, z'_x, $f'_x(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Таким образом, $\frac{\partial z}{\partial x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$.

Так как $\Delta_x z$ вычисляется при неизменном y, то частной производной по x от функции $z=f(x, y)$ называется производная по x, вычисленная в предположении, что y — постоянная.

26. Дана функция $z=x^2y^3+\sin x-e^y$; найти $\frac{\partial z}{\partial x}$.

Решение. Считая y постоянной, находим производную по x.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xy^3+\cos x.$$

27. Дана функция $z=\operatorname{arc\,tg} x-xy+5y$; найти $\frac{\partial z}{\partial x}$.

Аналогично определяется частная производная по y. Как известно, если y получает приращение Δy, а x сохраняет постоянное значение, то функция z получает частное приращение $\Delta_y z$.

Отношение $\frac{\Delta_y z}{\Delta y}$ выражает среднюю скорость изменения функции z на отрезке PP_2, то есть при перемещении точки $P(x, y)$ в точку $P_2(x, y+\Delta y)$, а предел этой средней скорости при $\Delta y\to 0$ дает истинную скорость изменения функции z по переменной y.

Частной производной по y от функции $z=f(x, y)$ называется предел отношения частного приращения $\Delta_y z$ к приращению Δy при стремлении последнего к нулю. Эта производная обозначается одним из символов

$$\frac{\partial z}{\partial y},\ z'_y,\ f'_y(x, y),\ \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}.$$

Так как $\Delta_y z$ вычисляется при неизменном x, то частной производной по y от функции $z=f(x, y)$ называется производная по y, вычисленная в предположении, что x — постоянная.

28. Дана функция $z=x^3\sin y+\ln x-y^2$; найти $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Решение. Считая x постоянной, находим производную по y:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^3\cos y-2y.$$

29. Дана функция $z=x^2\ln y+5x-\operatorname{arc\,tg} y$; найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Решение. $\frac{\partial z}{\partial x}=2x\ln y+5$; $\frac{\partial z}{\partial y}=x^2\cdot\frac{1}{y}-\frac{1}{1+y^2}$.

30. Показать, что $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xy+z$, если $z=xy+x\sin\frac{y}{x}$.

Решение. $\frac{\partial z}{\partial x}=y+\sin\frac{y}{x}+x\cos\frac{y}{x}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=$

$$=y+\sin\frac{y}{x}-\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x+\cos\frac{y}{x},$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xy+x\sin\frac{y}{x}-y\cos\frac{y}{x}+xy+y\cos\frac{y}{x}=xy+z.$$

31. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z=f(x,y)$, если

а) $z=5x^3-3xy^2+2y$; б) $z=\frac{xy}{x+y}$; в) $z=\ln(x^2+y^2)$;

г) $z=\sin\frac{y}{x}$; д) $z=\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}$.

32. $z=\ln(x^2+xy+y^2)$; показать, что $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2$.

33. $z=x^3y^2-2xy^4+3x^2y^3$; показать, что $\frac{\partial z}{\partial x}\cdot x+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot y=5z$.

34. $z=\frac{xy}{x+y}$; показать, что $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$.

35. $z=\ln(e^x+e^y)$; показать, что $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$.

36. $z=xy+xe^{\frac{1}{x}}$; показать, что $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xy+z$. ?

37. $z=(x^2+y^2)\operatorname{tg}\frac{x}{y}$; показать, что $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}\ 2z$.

Для функции любого числа переменных частные производные определяются так же, как и для функции двух переменных.

Например, если u и есть функция трех независимых переменных x, y и z, то есть $u=f(x, y, z)$, то

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y u}{\Delta y};\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta_z u}{\Delta z},$$

где $\Delta_x u$, $\Delta_y u$ и $\Delta_z u$ — соответствующие частные приращения функции u.

38. $u=xy^2z-x\sin y+5\ln x-3y+2z$; найти $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$.

Решение. Считая y и z постоянными величинами, находим частную производную по x.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y^2z-\sin y+\frac{5}{x}.$$

Считая x и z постоянными величинами, находим частную производную по y.

$$\frac{\partial u}{\partial y}=2xyz-x\cos y-3.$$

Считая x и y постоянными величинами, находим $\frac{\partial u}{\partial z}$.

$$\frac{\partial u}{\partial z}=xy^2+2.$$

39. $u=x\ln y+y\,e^{2z}-\operatorname{arc\,tg} x$; найти $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial z}$.

40. $u=x^2yz-x\sin(yz)+x\,e^{yz}$; найти $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial z}$.

41. Найти частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ функции u:

а) $u=\sin\frac{x+y}{z}$; б) $u=x^{\frac{y}{z}}$.

42. $u=x+\frac{x-y}{y-z}$; показать, что $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=1$

43. $u=\ln(x^3+y^3+z^3-3xyz)$; показать, что $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+$

$+\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{3}{x+y+z}$.

44. $u=\frac{xy}{z}\ln x+\frac{yz}{x}$; показать, что $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=$ $=u+\frac{xy}{z}$.

45. $z=x+y-\sqrt{x^2+y^2}$; вычислить $\frac{\partial z}{\partial x}$ в точке P (3, 4).

Решение. Дифференцируя по x, находим:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=1-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} .$$

При $x=3$ и $y=4$ получаем $\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]_P=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$.

46. $z=\ln\left(x+\frac{y}{2x}\right)$; вычислить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точке $P(1,0)$.

47. $z=\sqrt{xy+\frac{x}{y}}$; найти значения $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точке $P(2, 1)$.

48. $u=\ln(xy+z)$; найти значения $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial z}$ в точке M (2, 1, 0).

49. $u=\ln(5x-3y+2z)$; найти значения $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial z}$ в точке $M(1, 0, 2)$.

§ 5. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Рассмотрим функцию $z=f(x, y)$, графиком которой является поверхность, изображенная на рис. 4. Через точку M_0 (x_0, y_0, z_0) этой поверхности проведем плоскость P_1 параллельно плоскости xOz (рис. 4). Пусть плоскость P_1 пересекается с поверхностью по кривой AB. Так как $y=y_0$ есть уравнение плоскости P_1, то $z=f(x, y_0)$ есть уравнение кривой AB. Функция $z=f(x, y_0)$ зависит только от одной переменной x. Поэтому значение производной $\frac{\partial z}{\partial x}$ в точке $P_0(x_0, y_0)$ выражает собой угловой коэффициент касательной M_0T, проведенной к кривой AB в точке M_0.

Таким образом, $\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]_{P_0}=\operatorname{tg}\alpha$, где α — угол наклона касательной M_0T к плоскости xOy. Этот же угол касательная M_0T составляет с осью Ox.