1.1.102. Может ли нулевая матрица быть эквивалентной ненулевой матрице?

1.1.103. Может ли произведение матриц быть числом?

1.1.104. Как изменится произведение матриц A и B, если переставить i-ю и j-ю строки матрицы A?

1.1.105. Как изменится произведение матриц A и B, если к i-й строке матрицы A прибавить j-ю строку, умноженную на число c?

1.1.106. Как изменится произведение матриц A и B, если переставить i-й и j-й столбцы матрицы B?

1.1.107. Как изменится произведение матриц A и B, если к i-му столбцу матрицы B прибавить j-й столбец, умноженный на число c?

1.1.108*. Найти все квадратные матрицы A размера 2×2, если $A^2 = E$.

1.1.109*. Найти все квадратные матрицы A размера 2×2, если A^2 — нулевая матрица.

1.1.110*. Найти матрицу A^{n-1}, если A — квадратная матрица n-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.1.111*. Найти матрицу $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n$.

1.1.112*. Найти все матрицы, коммутирующие с матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1.1.113*. Доказать, что если A и B — квадратные матрицы n-го порядка, то суммы всех элементов главной диагонали у матриц AB и BA равны.

1.1.114*. Матрица называется стохастической, если сумма элементов любой ее строки равна 1. Доказать, что произведение стохастических матриц — тоже стохастическая матрица.

§ 2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Любой квадратной матрице n-го порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ можно поставить в соответствие выражение, которое называется *определителем (детерминантом)* матрицы A, и обозначается так:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ или $|A|$ или $\det A$.

⇛ Определитель 2-го порядка задается равенством:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} + (-a_{12}a_{21}).$$

Таким образом, определитель 2-го порядка есть сумма $2 = 2!$ слагаемых, каждое из которых представляет собой произведение 2-х сомножителей — элементов матрицы A, по одному из каждой строки и каждого столбца. Одно из слагаемых берется со знаком «+», другое — со знаком «−».

⇛ Определитель 3-го порядка задается равенством:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} +$$
$$+ (-a_{13}a_{22}a_{31}) + (-a_{12}a_{21}a_{33}) + (-a_{11}a_{23}a_{32}). \quad (2.1)$$

Таким образом, определитель 3-го порядка есть сумма $6 = 3!$ слагаемых, каждое из которых представляет собой произведение 3-х сомножителей — элементов матрицы A, по одному из каждой строки и каждого столбца. Одна половина слагаемых берется со знаком «+», другая — со знаком «−». Правило, по которому выбираются эти знаки, задается с помощью формулы (2.1) или другими методами, приведенными ниже.

Определитель n-го порядка задается равенством:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (\pm a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdot \ldots \cdot a_{ni_n}).$$

Указанная сумма состоит из $n!$ слагаемых, каждое из которых представляет собой произведение n сомножителей — элементов матрицы A, по одному из каждой строки и каждого столбца. Одна половина слагаемых берется со знаком «+», другая — со знаком «−». Правило, по которому выбираются эти знаки, в настоящем издании не используется и здесь не приводится. Методы вычисления определителей n-го порядка приведены ниже.

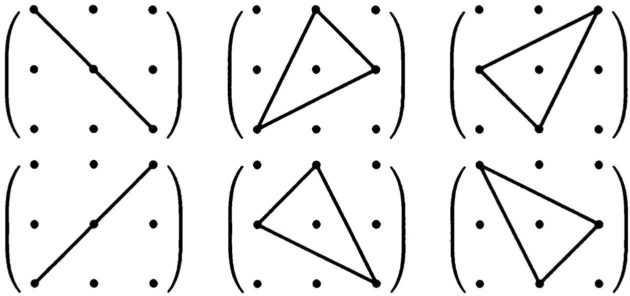
Методы вычисления определителей

1. *Правило «треугольников»* (правило Саррюса) вычисления определителей 3-го порядка: первое из трех слагаемых, входящих в сумму (2.1) со знаком «+», есть произведение элементов главной диагонали, второе и третье — произведения элементов, находящихся в вершинах двух

треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали. Три слагаемых, входящих в сумму (2.1) со знаком «−», определяются аналогично, но относительно второй (побочной) диагонали:

«+»

«−»



2. *Разложение определителя 3-го порядка по первой строке:*

$$\det A = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \tag{2.2}$$

При таком способе вычисления определителя каждый из трех элементов a_{1j} первой строки умножается на определитель 2-го порядка, составленный из элементов матрицы A, оставшихся после вычеркивания 1-й строки и j-го столбца. При этом слагаемое с множителем a_{1j} умножается на число $(-1)^{1+j}$:

$$\det A = (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot \begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \cdot \begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & \cancel{a_{32}} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+3} \cdot a_{13} \cdot \begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & \cancel{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & \cancel{a_{33}} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, вычисление определителя 3-го порядка сводится к вычислению 3-х определителей 2-го порядка. В общем случае можно вычислять определитель n-го порядка квадратной матрицы A, сводя его к вычислению n определителей $(n-1)$-го порядка.

3. *Разложение определителя n-го порядка по первой строке.* Аналогично последней формуле, имеем

$$\det A = (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot \begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} & \cancel{\dots} & \cancel{a_{1n}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cancel{a_{n1}} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$
+(-1)^{1+2}\cdot a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}+
$$

$$
+(-1)^{1+3}\cdot a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}+\dots
$$

$$
\dots+(-1)^{1+n}\cdot a_{1n}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix},
$$

т. е.

$$
\det A = a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n}\\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}-
$$

$$
-a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n}\\ a_{31} & a_{33} & \dots & a_{3n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}+a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} & \dots & a_{2n}\\ a_{31} & a_{32} & a_{34} & \dots & a_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n4} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}-\dots
$$

$$
\dots+(-1)^{1+n}a_{1n}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n-1}\\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-1}\end{vmatrix}. \qquad (2.3)
$$

Аналогично задаются другие способы вычисления определителя n-го порядка — «разложение» по произвольной строке или произвольному столбцу — (2.4), (2.5).

Определителем (детерминантом) 1-го порядка квадратной матрицы $A = (a_{11})$ называется значение a_{11}: $\det A = a_{11}$.

Дополнительным минором M_{ij} к элементу a_{ij} квадратной матрицы A называется минор, составленный из элементов A, оставшихся после вычеркивания i-й строки и j-го столбца.

Алгебраическим дополнением A_{ij} к элементу a_{ij} квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ называется произведение $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Например, в матрице $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ минором M_{21} является определитель, составленный из элементов матрицы, оставшихся после вычеркивания 2-й строки и 1-го столбца: $\begin{pmatrix} \cancel{1} & 2 & 3 \\ \cancel{4} & \cancel{5} & \cancel{6} \\ \cancel{7} & 8 & 0 \end{pmatrix}$.

Таким образом, $M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 - 3 \cdot 8 = -24$; соответственно, алгебраическим дополнением A_{21} будет число $A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = (-1)^3 \cdot (-24) = 24$. В новых обозначениях, аналогично формуле (2.2), записывается формула «разложение определителя 3-го порядка по первой строке»:

$$\det A = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} = \sum_{j=1}^{3} a_{1j} \cdot A_{1j}.$$

Аналогично формуле (2.3) записывается формула «разложение определителя n-го порядка по первой строке»:

$$\det A = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + \cdots + a_{1n-1} \cdot A_{1n-1} + a_{1n} \cdot A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot A_{1j}.$$

4. *Разложение определителя n-го порядка по i-й строке*:

$$\det A = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \cdots + a_{in-1} \cdot A_{in-1} + a_{in} \cdot A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij},$$
$$\forall i = \overline{1, n}. \tag{2.4}$$

5. *Разложение определителя n-го порядка по j-му столбцу*:

$$\det A = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \cdots + a_{n-1j} \cdot A_{n-1j} + a_{nj} \cdot A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}$$
$$\forall j = \overline{1, n}. \tag{2.5}$$

6. *Метод приведения к треугольному виду* заключается в приведении определителя (с помощью элементарных преобразований) к такому виду, когда все элементы, расположенные по одну сторону одной из диагоналей, равны нулю.

7. *Метод рекуррентных соотношений* состоит в том, что определитель n-го порядка выражают через определители того же вида, но более низкого порядка, используя элементарные преобразования и разложение по строке или столбцу.

Свойства определителей

1. Если у определителя какая-либо строка (столбец) состоит только из нулей, то определитель равен 0.

2. Если какие-либо две строки (два столбца) определителя пропорциональны, то определитель равен 0.

3. Если какую-либо строку (столбец) определителя умножить на произвольное число, то и весь определитель умножится на это число.

4. Если две строки (два столбца) определителя поменять местами, то определитель изменит знак.

5. Если к какой-либо строке (столбцу) определителя прибавить какую-либо другую строку (столбец), умноженную на произвольное число, то определитель не изменится.

6. Определитель произведения матриц равен произведению их определителей.

Матрица, определитель которой равен 0, называется *вырожденной*; матрица, определитель которой не равен 0, называется *невырожденной*.

1.2.1. Вычислить определитель второго порядка $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$.

○ $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2.$ ●

Вычислить определители второго порядка:

1.2.2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}$.

1.2.3. $\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$.

1.2.4. $\begin{vmatrix} x & xy \\ 1 & y \end{vmatrix}$.

1.2.5. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

1.2.6. $\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix}$.

1.2.7. $\begin{vmatrix} \operatorname{tg}\varphi & 1 \\ -1 & \operatorname{tg}\varphi \end{vmatrix}$.

Решить уравнения:

1.2.8. $\begin{vmatrix} 2x+1 & 3 \\ x+5 & 2 \end{vmatrix} = 0.$

1.2.9. $\begin{vmatrix} x+3 & x-1 \\ 7-x & x-1 \end{vmatrix} = 0.$

1.2.10. $\begin{vmatrix} 2x-1 & x+1 \\ x+2 & x-1 \end{vmatrix} = -6.$

1.2.11. $\begin{vmatrix} x-2 & y+3 \\ -y-3 & x-2 \end{vmatrix} = 0.$

1.2.12. $\begin{vmatrix} \sin 2x & \sin x \\ \cos x & \cos 2x \end{vmatrix} = 0.$

1.2.13. Вычислить определитель 3-го порядка: $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$.

❍ Вычисляя определитель разложением по первой строке, получим:

$$3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} =$$
$$= 3 \cdot (5 \cdot 2 - 3 \cdot 4) - 2 \cdot (2 \cdot 2 - 3 \cdot 3) + 1 \cdot (2 \cdot 4 - 5 \cdot 3) =$$
$$= 3 \cdot (-2) - 2 \cdot (-5) + 1 \cdot (-7) = -3.$$ ●

Вычислить определители 3-го порядка:

1.2.14. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

1.2.15. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

1.2.16. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}$.

1.2.17. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$.

1.2.18. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 16 & 25 & 81 \end{vmatrix}$.

1.2.19. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 8 \\ 25 & 49 & 64 \end{vmatrix}$.

1.2.20. Вычислить определитель с помощью «правила треугольников»

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

❍ Из шести слагаемых не равным нулю будет только одно: $+1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. ●

Вычислить определители с помощью «правила треугольников»:

1.2.21. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

1.2.22. $\begin{vmatrix} 0 & x & 0 \\ y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z \end{vmatrix}$.

1.2.23. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}$.

1.2.24. Вычислить определитель разложением по какой-нибудь строке или столбцу:

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 7 & -4 & 5 \end{vmatrix}.$$

❍ Удобнее всего вычислять определитель разложением по строке или столбцу, содержащим наибольшее количество нулей. Разложим определитель по 2-й строке:

$$(-1)^{2+1}\cdot 0\cdot\begin{vmatrix}6 & 3\\ -4 & 5\end{vmatrix}+(-1)^{2+2}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}5 & 3\\ 7 & 5\end{vmatrix}+(-1)^{2+3}\cdot 0\cdot\begin{vmatrix}5 & 6\\ 7 & -4\end{vmatrix}=$$
$$=2\cdot(25-21)=8. \quad \bullet$$

1.2.25. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}3 & 0 & 2\\ -5 & 3 & -1\\ 6 & 0 & 3\end{vmatrix}$.

○ При разложении определителя 3-го порядка по строке или столбцу, знаки («+» или «−») перед слагаемым $a_{ij}\cdot M_{ij}$ проще всего запомнить в следующем виде:

$$\begin{vmatrix}+ & - & +\\ - & + & -\\ + & - & +\end{vmatrix}.$$

Разложим определитель по 2-му столбцу:

$$-0+3\cdot\begin{vmatrix}3 & 2\\ 6 & 3\end{vmatrix}-0=3\cdot(9-12)=-9. \quad \bullet$$

Вычислить определители 3-го порядка разложением по какой-нибудь строке или столбцу:

1.2.26. $\begin{vmatrix}2 & 0 & 3\\ 7 & 1 & 6\\ 6 & 0 & 5\end{vmatrix}$.

1.2.27. $\begin{vmatrix}0 & a & 0\\ b & c & d\\ 0 & e & 0\end{vmatrix}$.

1.2.28. $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1\\ 4 & 5 & 6\end{vmatrix}$.

1.2.29. $\begin{vmatrix}2 & 1 & -3\\ 0 & 1 & -1\\ 3 & -2 & 1\end{vmatrix}$.

1.2.30. $\begin{vmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha & 1\\ \sin\beta & \cos\beta & 1\\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1\end{vmatrix}$.

Решить уравнения и неравенство:

1.2.31. $\begin{vmatrix}2 & 0 & 3\\ -1 & 7 & x-3\\ 5 & -3 & 6\end{vmatrix}=0.$

1.2.32. $\begin{vmatrix}-1 & 3 & -2\\ 2-3x & 0 & 5\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}\geqslant 0.$

1.2.33. $\begin{vmatrix}-1 & 0 & 2x+3\\ 3-x & 1 & 1\\ 2x+1 & -1 & 2\end{vmatrix}=0.$

1.2.34. $\begin{vmatrix}6 & 3 & x-1\\ 2x & 1 & 0\\ 4 & x+2 & 2\end{vmatrix}=0.$

1.2.35. Доказать равенство, используя свойства определителей:

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1+a_1x+b_1y\\ a_2 & b_2 & c_2+a_2x+b_2y\\ a_3 & b_3 & c_3+a_3x+b_3y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}.$$

❍ Так как третий столбец левого определителя можно представить в виде суммы трех столбцов, этот определитель можно представить в виде суммы трех определителей:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x \\ a_2 & b_2 & a_2x \\ a_3 & b_3 & a_3x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & b_1y \\ a_2 & b_2 & b_2y \\ a_3 & b_3 & b_3y \end{vmatrix}.$$

Третий столбец во втором определителе пропорционален первому столбцу, а в третьем определителе — второму столбцу, следовательно, оба этих определителя равны нулю. Что и завершает доказательство. ●

Доказать равенства:

1.2.36. $\begin{vmatrix} a_1 - xb_1 & a_1 + xb_1 & c_1 \\ a_2 - xb_2 & a_2 + xb_2 & c_2 \\ a_3 - xb_3 & a_3 + xb_3 & c_3 \end{vmatrix} = 2x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$

1.2.37. $\begin{vmatrix} a_1 + xb_1 & a_1x + b_1 & c_1 \\ a_2 + xb_2 & a_2x + b_2 & c_2 \\ a_3 + xb_3 & a_3x + b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1 - x^2) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$

Вычислить, используя свойства определителей:

1.2.38. $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & 1 \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & 1 \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & 1 \end{vmatrix}.$ **1.2.39.** $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & cos2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix}.$

1.2.40. $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}.$

1.2.41. Вычислить определитель 4-го порядка разложением по строке или столбцу:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

❍ Удобнее пользоваться разложением по строке или столбцу, содержащим наибольшее количество нулей. Разложим определитель по первой строке:

$$\Delta = (-2) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} - (-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} -$$

$$- 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -2 \cdot 9 + 3 \cdot 31 + 0 - 2 \cdot 6 = 63.$$

При вычислении определителей 4-го порядка разложением по строке или столбцу, знаки («+» или «−») перед слагаемым $a_{ij} \cdot M_{ij}$ проще всего запомнить в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}.$$

Аналогично, для вычисления определителя n-го порядка знаки расположены следующим образом (в «шахматном» порядке, слева вверху знак «+»):

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \ldots \\ - & + & - & + & \ldots \\ + & - & + & - & \ldots \\ - & + & - & + & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}.$$ ●

1.2.42. Вычислить определитель 4-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & b & 2 \\ 1 & c & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}.$$

❍ Разложим определитель по 4-ой строке:

$$\Delta = (+d) \cdot \begin{vmatrix} a & 0 & 3 \\ 0 & 0 & b \\ 1 & c & 2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{разложим определитель} \\ \text{по 2-ой строке} \end{bmatrix} =$$

$$= d \cdot (-b) \cdot \begin{vmatrix} a & 0 \\ 1 & c \end{vmatrix} = -d \cdot b \cdot a \cdot c.$$ ●

Вычислить определители, используя разложение по строке или столбцу:

1.2.43. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$

1.2.44. $\begin{vmatrix} 0 & -a & -b & -d \\ a & 0 & -c & -e \\ b & c & 0 & 0 \\ d & e & 0 & 0 \end{vmatrix}.$

1.2.45. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}.$

1.2.46. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$

1.2.47. $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}.$

1.2.48. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}.$

1.2.49. Вычислить определитель приведением к треугольному виду:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & n-1 \end{vmatrix}.$$

❍ Прибавляя к каждой строке определителя первую строку, получим:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \dots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{разложим по} \\ \text{первому столбцу} \end{bmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 0 & 0 & 4 & \dots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix}}_{n-1} = \begin{bmatrix} \text{повторяем разложение по} \\ \text{первому столбцу } n-2 \text{ раза} \end{bmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = n! \quad \bullet$$

1.2.50. Вычислить определитель n-го порядка:

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

❍ Разложим определитель по первой строке:

$$D_n = (-1)^{n+1} \cdot (-1) \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}}_{n-1} = (-1)^{n+2} \cdot D_{n-1}.$$

Аналогично $D_{n-1} = (-1)^{n+1} \cdot D_{n-2}$ и т. д. Таким образом,

$$D_n = (-1)^{n+2} \cdot (-1)^{n+1} \cdot \ldots \cdot (-1)^{2+2} \cdot D_1.$$

Учитывая, что

$$(-1)^{n+2} = (-1)^n, \quad (-1)^{n+1} = (-1)^{n-1}, \quad \ldots, \quad (-1)^{2+2} = (-1)^2;$$
$$D_1 = -1,$$

получим выражение для D_n:

$$D_n = (-1)^n \cdot (-1)^{n-1} \cdot \ldots \cdot (-1)^2 \cdot (-1)^1 =$$
$$= (-1)^{1+2+\ldots+(n-1)+n} = (-1)^{n\cdot\frac{n+1}{2}}. \quad \bullet$$

Вычислить определители n-го порядка:

1.2.51. $\begin{vmatrix} n & n & n & \ldots & n & n & n \\ n & n-1 & n & \ldots & n & n & n \\ n & n & n-2 & \ldots & n & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \ldots & 3 & n & n \\ n & n & n & \ldots & n & 2 & n \\ n & n & n & \ldots & n & n & 1 \end{vmatrix}.$

1.2.52. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ -1 & 0 & 3 & \ldots & n \\ -1 & -2 & 0 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \ldots & 0 \end{vmatrix}.$

1.2.53. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \ldots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \ldots & n & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & n & \ldots & n & n & n \\ n & n & n & \ldots & n & n & n \end{vmatrix}.$

1.2.54. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \ldots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \ldots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \ldots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \ldots & 3 \end{vmatrix}.$ **1.2.55.** $\begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & n & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & n & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & n \end{vmatrix}.$

1.2.56. Вычислить определитель n-го порядка методом рекуррентных соотношений:

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

○ Разложим определитель по первому столбцу

$$D_n = 2 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}}_{n-1} - 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}}_{n-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} \text{разложим второй} \\ \text{определитель по} \\ \text{первой строке} \end{bmatrix} =$$

$$= 2 \cdot D_{n-1} - 1 \cdot 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}}_{n-2} = 2 \cdot D_{n-1} - D_{n-2}.$$

Вычислим D_2, D_3 и D_4:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3;$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = 4;$$

$$D_4 = 2D_3 - D_2 = 2 \cdot 4 - 3 = 5.$$

Итак, $D_2 = 3$, $D_3 = 4$, $D_4 = 5$. Докажем (по индукции), что $D_n = n + 1$. По предположению индукции, $D_{n-2} = n - 1$, $D_{n-1} = n$. Учитывая, что $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$, получим $D_n = 2n - (n - 1) = n + 1$, что и требовалось. ●

Вычислить определители методом рекуррентных соотношений:

1.2.57. $\left.\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix}\right\} n.$ **1.2.58.** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}.$

Дополнительные задачи

Вычислить определители 2-го порядка:

1.2.59. $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}.$ **1.2.60.** $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{vmatrix}.$

1.2.61. $\begin{vmatrix} x^2 & x \\ xy^2 & y^2 \end{vmatrix}$.

1.2.62. $\begin{vmatrix} \alpha & 3\alpha \\ \beta & 3\beta \end{vmatrix}$.

1.2.63. $\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix}$.

1.2.64. $\begin{vmatrix} x & x-1 \\ x^2+x+1 & x^2 \end{vmatrix}$.

Решить уравнения:

1.2.65. $\begin{vmatrix} 2x-3 & 4 \\ -x & -3 \end{vmatrix} = 0.$

1.2.66. $\begin{vmatrix} x+3 & x+1 \\ x-1 & x-2 \end{vmatrix} = 0.$

1.2.67. $\begin{vmatrix} 3-x & x+2 \\ x+1 & x-1 \end{vmatrix} = 6.$

1.2.68. $\begin{vmatrix} x-2 & y+3 \\ 1-y & x-2 \end{vmatrix} = -4.$

1.2.69. $\begin{vmatrix} x-2 & y+3 \\ 7-y & x+4 \end{vmatrix} = -34.$

1.2.70. $\begin{vmatrix} \sin 2x & -\sin 3x \\ \cos 2x & \cos 3x \end{vmatrix} = 0.$

Вычислить определители 3-го порядка разложением по первой строке:

1.2.71. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \end{vmatrix}$.

1.2.72. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

1.2.73. $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$.

1.2.74. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$.

Вычислить определители с помощью «правила треугольников»:

1.2.75. $\begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{vmatrix}$.

1.2.76. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

1.2.77. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & 0 \\ \cos\alpha & 0 & \cos\gamma \\ 0 & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix}$.

1.2.78. $\begin{vmatrix} 0 & x & 0 \\ x & 1 & x \\ 0 & x & 0 \end{vmatrix}$.

Вычислить определители разложением по какой-нибудь строке или столбцу:

1.2.79. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}$.

1.2.80. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$.

1.2.81. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}$.

1.2.82. $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & y & z \\ x & 0 & z \end{vmatrix}$.

1.2.83. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Решить уравнения и неравенства:

1.2.84. $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ x-1 & 0 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$

1.2.85. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & x+5 & 2-x \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \leqslant 4.$

1.2.86. $\begin{vmatrix} x+2 & 4 & -1 \\ -2 & 2 & x-1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$

1.2.87. $\begin{vmatrix} -3 & x-1 & 1 \\ x+2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = 6.$

1.2.88. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ x+2 & 0 & 1 \\ -2 & 3-x & 1 \end{vmatrix} < 0.$

Не вычисляя определителей, проверить, что они делятся на $a-b$, $b-c$, $c-a$:

1.2.89. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$

1.2.90. $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}.$

1.2.91. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}.$

Вычислить, используя свойства определителей:

1.2.92. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin(\gamma+\delta) \end{vmatrix}.$

1.2.93. $\begin{vmatrix} a & a^2+1 & (a+1)^2 \\ b & b^2+1 & (b+1)^2 \\ c & c^2+1 & (c+1)^2 \end{vmatrix}.$

Вычислить определители разложением по строке или столбцу:

1.2.94. $\begin{vmatrix} x & a & b & 0 & c \\ 0 & y & 0 & 0 & d \\ 0 & e & z & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \\ g & h & k & u & l \end{vmatrix}.$

1.2.95. $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$

1.2.96. $\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}.$

1.2.97. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{vmatrix}.$

1.2.98. $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$

1.2.99. $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$