Окружность

⇛ *Окружностью* называется множество всех точек плоскости, удаленных от заданной точки A этой же плоскости на одно и тоже расстояние $R > 0$. Точка A называется *центром*, а R — *радиусом* окружности.

В прямоугольной системе координат уравнение окружности имеет вид

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2, \tag{3.2}$$

где $(a; b)$ — координаты ее центра, (рис. 31). Уравнение (3.2) называется ***каноническим уравнением окружности.*** В частности, если $a = 0$, $b = 0$ (т.е. центр окружности совпадает с началом координат), то уравнение (3.2) имеет вид

$$x^2 + y^2 = R^2. \tag{3.3}$$

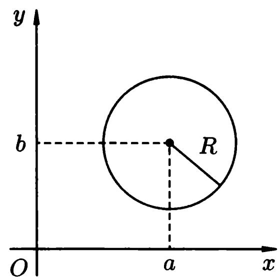

Рис. 31

Общее уравнение второй степени (3.1) определяет окружность, если $A = C \neq 0$ и $B = 0$.

4.3.1. Найти координаты центра и радиус окружности:
1) $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 16 = 0$;
2) $9x^2 + 9y^2 + 42x - 54y - 95 = 0$;

◕ 1) Выделяя полные квадраты в левой части данного уравнения, приведем его к виду (3.2):

$$x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 + 8y + 16 - 16 - 16 = 0,$$

т.е. $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 6^2$. Центр окружности находится в точке $(2; -4)$, а радиус равен 6.

2) Преобразуем уравнение к виду (3.2): разделив обе части уравнения на 9, находим $x^2 + y^2 + \frac{14}{3}x - 6y - \frac{95}{9} = 0$. И далее, $x^2 + \frac{14}{3}x + \left(\frac{7}{3}\right)^2 + y^2 - 6y + 9 - \frac{49}{9} - 9 - \frac{95}{9} = 0$, т.е.

$\left(x+\frac{7}{3}\right)^2+(y-3)^2=25$. Итак, $R=5$, центр окружности — точка $\left(-\frac{7}{3};3\right)$. ●

4.3.2. Найти координаты центра и радиус окружности:
а) $x^2+y^2-4x+6y-3=0$;
б) $3x^2+3y^2+6x-4y-2=0$.

4.3.3. Написать уравнения касательных к окружности $x^2+y^2-6x+4y-12=0$, проведенных из точки $M(0;3)$.

❍ Уравнения касательных будем искать в виде уравнений прямых с угловыми коэффициентами: $y=kx+3$. Уравнение окружности приведем к каноническому виду (3.2): $(x-3)^2+(y+2)^2-9-4-12=0$, т.е. $(x-3)^2+(y+2)^2=25$. Для нахождения общих точек прямой и окружности решим систему уравнений

$$\begin{cases} y=kx+3,\\ (x-3)^2+(y+2)^2=25. \end{cases}$$

Имеем: $(x-3)^2+(kx+3+2)^2=25$, т.е. $x^2-6x+9+k^2x^2+10kx+25=25$, поэтому $(k^2+1)x^2+(10k-6)x+9=0$. Так как прямая касается окружности, то это уравнение имеет единственное решение. Следовательно, его дискриминант равен нулю, т.е. $(5k-3)^2-9(k^2+1)=0$, или $16k^2-30k=0$, откуда $k_1=0$, $k_2=\frac{15}{8}$. Значит, $y=3$ и $y=\frac{15}{8}x+3$ — искомые уравнения. ●

4.3.4. Найти уравнение окружности, касающейся осей координат и проходящей через точку $(4;-2)$.

4.3.5. Найти уравнения касательных к окружности $(x-4)^2+(y-2)^2=4$, проведенных из начала координат.

4.3.6. Найти центр и радиус окружности, вписанной в треугольник со сторонами $3x+4y-12=0$, $4x-3y+12=0$, $y=0$.

Указание. Центр окружности равноудален от сторон треугольника.

4.3.7. Написать уравнение окружности, проходящей через точки: $(-1;3)$, $(0;2)$, $(1;-1)$.

❍ Уравнение окружности ищем в виде (3.2):

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

Подставляя в это уравнение координаты данных точек, получим три уравнения для определения a, b и R:

$$\begin{cases} (-1-a)^2+(3-b)^2=R^2,\\ a^2+(2-b)^2=R^2,\\ (1-a)^2+(-1-b)^2=R^2. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений получаем $(-1-a)^2+(3-b)^2 = a^2 + (2-b)^2$, т. е. $1+2a+a^2+9-6b+b^2 = a^2+4-4b+b^2$, поэтому $a-b=-3$; из второго и третьего уравнений системы получаем $a^2+(2-b)^2 = (1-a)^2+(-1-b)^2$, отсюда $a-3b=-1$. Решая систему уравнений
$$\begin{cases} a-b=-3, \\ a-3b=-1, \end{cases}$$
находим $a=-4$, $b=-1$. Подставляя эти значения a и b во второе уравнение первоначальной системы, находим: $16+9=R^2$, т. е. $R^2=25$. Искомое уравнение есть $(x+4)^2+(y+1)^2=25$.

Заметим, что уравнение окружности можно искать в виде $x^2+y^2+2Dx+2Ey+F=0$. Так как данные три точки принадлежат окружности, то подставив их координаты в записанное уравнение, получим систему трех уравнений:
$$\begin{cases} 10-2D+6E+F=0, \\ 4+4E+F=0, \\ 2+2D-2E+F=0. \end{cases}$$
Решив систему, найдем $D=4$, $E=1$, $F=-8$ и искомое уравнение окружности $x^2+y^2+8x+2y-8=0$. ●

4.3.8. Написать уравнение окружности, если:

а) центр находится в точке $C(-2;0)$, а радиус $R=2$;

б) центр лежит в точке $C(-4;5)$ и окружность проходит через точку $M(-1;1)$;

в) концы одного из диаметров имеют координаты $(0;4)$ и $(6;0)$.

4.3.9. Составить уравнение окружности, проходящей через точки $A(3;5)$, $B(5;-1)$, если ее центр лежит на прямой $x-y-2=0$.

Дополнительные задачи

4.3.10. Найти расстояние между центрами окружностей $x^2+y^2=9$ и $x^2+y^2-8x+12=0$.

4.3.11. Найти уравнение прямой, проходящей через центры окружностей $x^2+y^2-6x-8y+16=0$ и $x^2+y^2+10x+4y+13=0$.

4.3.12. Найти точки пересечения окружности $(x-2)^2+(y+3)^2=20$ и прямой $y=x-3$.

4.3.13. Найти уравнение общей хорды окружностей: $(x-1)^2+(y-3)^2 = 4$, $x^2+y^2-6x-10y+30=0$.

4.3.14. Найти центр и радиус окружности, описанной около треугольника с вершинами $A(0;2)$, $B(1;1)$, $C(2;-2)$.

4.3.15. Составить уравнение окружности, касающейся прямых $2x+y-5=0$ и $2x+y+15=0$, причем одной из них — в точке $A(2;1)$.

4.3.16. Найти угол между радиусами окружности $(x-4)^2+(y+3)^2-25=0$, проведенными в точках ее пересечения с осью Ox.