4.3.17. Найти при каких значениях k прямая $y = kx$ пересекает окружность $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 16 = 0$; касается этой окружности.

4.3.18. Найти уравнения касательных к окружности $x^2 + y^2 = 5$, параллельных прямой $y = 2x + 1$.

Контрольные вопросы и более сложные задачи

4.3.19*. Найти уравнение касательной к окружности $x^2 + y^2 = R^2$ в точке $(x_0; y_0)$.

4.3.20*. Найти длины отрезков касательных, проведенных из точки $A(6; 3)$ к окружности $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 1$ от этой точки до точек касания.

4.3.21*. Найти уравнение окружности, симметричной окружности $x^2 - 2x + y^2 + 4y + 4 = 0$ относительно прямой $x + y - 5 = 0$.

4.3.22. Можно ли провести окружность через четыре точки: $(1; -2)$, $(5; 2)$, $(5; -6)$, $(7; 1)$?

4.3.23. Пройдет ли окружность с центром в точке $(-3; 4)$ и радиусом $R = 5$ через начало координат?

4.3.24. Какие из точек $A(-2; 7)$, $B(1; 5)$, $C(2; 3{,}9)$ лежат внутри круга, ограниченного окружностью $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$?

4.3.25*. Написать уравнение множества окружностей, образованного параллельным переносом окружности $x^2 + y^2 + 10x - 6y + 25 = 0$ вдоль оси Ox.

4.3.26. Дано множество концентрических окружностей $x^2 + y^2 + 12y + C = 0$. Найти уравнение той окружности, радиус которой равен 10.

Эллипс

$\Rrightarrow$ *Эллипсом* называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой же плоскости, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

Каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{3.4}$$

где a — ***большая полуось***, b — ***малая полуось*** эллипса. Координаты фокусов: $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$, где c — половина расстояния между фокусами (рис. 32). Числа a, b и c связаны соотношением

$$c^2 = a^2 - b^2. \tag{3.5}$$

Точки A, B, C, D называются ***вершинами*** эллипса, точка O — ***центром*** эллипса, расстояния r_1 и r_2 от произвольной точки M эллипса до его фокусов называются ***фокальными радиусами*** этой точки.

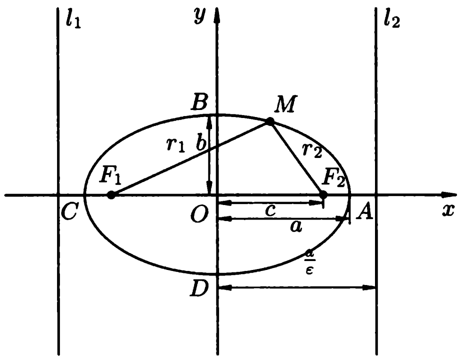

Рис. 32

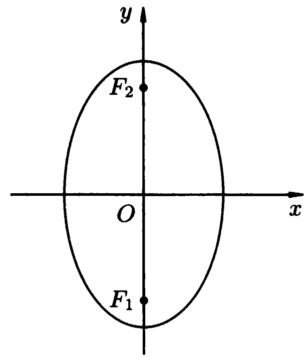

Рис. 33

$\Rrightarrow$ *Эксцентриситетом* ε эллипса называется отношение фокусного расстояния $2c$ (расстояния между фокусами) к большой оси $2a$:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \qquad (\varepsilon < 1,\ \text{т.к. } c < a). \tag{3.6}$$

Фокальные радиусы определяются формулами:

$$r_1 = a + \varepsilon x, \quad r_2 = a - \varepsilon x \quad (r_1 + r_2 = 2a). \tag{3.7}$$

$\Rrightarrow$ *Директрисами эллипса* называются прямые l_1 и l_2 параллельные малой оси эллипса и отстоящие от нее на расстоянии, равном $\frac{a}{\varepsilon}$; уравнения директрис:

$$x = \frac{a}{\varepsilon} \quad \text{и} \quad x = -\frac{a}{\varepsilon}. \tag{3.8}$$

Замечания. 1) Если $a = b$,то уравнение (3.4) определяет окружность $x^2 + y^2 = a^2$;

2) если фокусы эллипса лежат на оси Oy, то эллипс имеет вид, изображенный на рисунке 33: В этом случае:

$$b > a, \quad c^2 = b^2 - a^2, \tag{3.9}$$

$$\varepsilon = \frac{c}{b}, \tag{3.10}$$

уравнения директрис $y = \pm\frac{b}{\varepsilon}$;

3) уравнение эллипса с осями, параллельными координатным, имеет вид

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1, \tag{3.11}$$

где $(x_0; y_0)$ — координаты центра эллипса (рис. 34);

4) уравнения

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi]$$

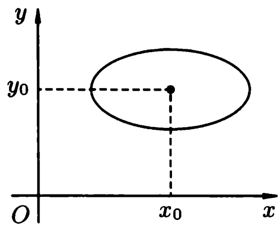

Рис. 34

являются *параметрическими уравнениями эллипса.*

4.3.27. Показать, что уравнение $4x^2+3y^2-8x+12y-32=0$ определяет эллипс, найти его оси, координаты центра и эксцентриситет.

◑ Преобразуем данное уравнение кривой. Так как

$$4x^2+3y^2-8x+12y-32=4(x^2-2x)+3(y^2+4y)-32=$$
$$=4(x^2-2x+1-1)+3(y^2+4y+4-4)-32=$$
$$=4(x-1)^2-4+3(y+2)^2-12-32,$$

то уравнение можно переписать в виде $4(x-1)^2+3(y+2)^2=48$, т. е. $\frac{(x-1)^2}{12}+\frac{(y+2)^2}{16}=1$. Получили уравнение вида (3.11); его центр симметрии имеет координаты $(1;-2)$. Из уравнения находим: $a^2=12$, $a=2\sqrt{3}$ и $b^2=16$, $b=4$ $(b>a)$. Поэтому $c=\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{16-12}=2$. Эксцентриситет эллипса $\varepsilon=\frac{c}{b}=\frac{1}{2}$. ●

4.3.28. Дано уравнение эллипса $24x^2+49y^2=1176$. Найти:

1) длины его полуосей;

2) координаты фокусов;

3) эксцентриситет эллипса;

4) уравнения директрис и расстояние между ними;

5) точки эллипса, расстояние от которых до левого фокуса F_1 равно 12.

◑ Запишем уравнение эллипса в виде (3.4), разделив обе его части на 1176:

$$\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1.$$

1) Отсюда $a^2=49$, $b^2=24$, т. е. $a=7$, $b=2\sqrt{6}$.

2) Используя соотношение (3.5), находим $c^2=7^2-(2\sqrt{6})^2=25$, $c=5$. Следовательно, $F_1(-5;0)$ и $F_2(5;0)$.

3) По формуле (3.6) находим: $\varepsilon = \frac{5}{7}$.

4) Уравнения директрис (3.8) имеют вид $x = \pm\frac{7}{\frac{5}{7}}$, т. е. $x = \frac{49}{5}$ и $x = -\frac{49}{5}$; расстояние между ними $d = \frac{49}{5} - \left(-\frac{49}{5}\right) = \frac{98}{5} = 19{,}6$.

5) По формуле $r_1 = a + \varepsilon x$ находим абсциссу точек, расстояние от которых до точки F_1 равно 12: $12 = 7 + \frac{5}{7}x$, т. е. $x = 7$. Подставляя значение x в уравнение эллипса, найдем ординаты этих точек: $24 \cdot 49 + 49y^2 = 1176$, $49y^2 = 0$, $y = 0$. Условию задачи удовлетворяет точка $A(7; 0)$. ●

4.3.29. Найти полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет и уравнения директрис эллипса $16x^2 + 25y^2 - 400 = 0$.

4.3.30. Составить уравнение эллипса, зная, что:

1) его большая полуось равна 10 и фокусы суть $F_1(-6; 0)$, $F_2(10; 0)$;

2) $a = 5$, $F_1(-3; 5)$, $F_2(3; 5)$.

4.3.31. Составить уравнение эллипса, проходящего через точки $M_1(2; -4\sqrt{3})$ и $M_2(-1; 2\sqrt{15})$.

○ Уравнение эллипса ищем в виде (3.4)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

Так как эллипс проходит через точки M_1 и M_2, то их координаты удовлетворяют уравнению эллипса: $\frac{4}{a^2} + \frac{48}{b^2} = 1$ и $\frac{1}{a^2} + \frac{60}{b^2} = 1$. Умножая второе равенство на (-4) и складывая с первым, находим $-\frac{192}{b^2} = -3$, т. е. $b^2 = 64$. Подставляя найденное значение b^2 в первое уравнение, получаем $\frac{4}{a^2} + \frac{48}{64} = 1$, откуда $a^2 = 16$. Таким образом, искомое уравнение эллипса есть $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{64} = 1$. ●

4.3.32. Составить каноническое уравнение эллипса, фокусы которого расположены на оси Ox, симметрично относительно начала координат, если:

1) задана точка $M_1(2\sqrt{3}; 1)$ эллипса и его малая полуось равна 2;

2) заданы две точки эллипса $M_1(0; 7)$ и $M_2(8; 0)$;

3) расстояние между фокусами равно 24 и большая ось равна 26;

4) эксцентриситет равен $\varepsilon = \frac{7}{25}$ и заданы фокусы $(\pm 7; 0)$.

4.3.33. Составить уравнение эллипса, фокусы которого расположены на оси Ox, симметрично относительно начала координат, зная, что:

1) $M_1(2\sqrt{3}; 0{,}4\sqrt{10})$ и $M_2\left(-\frac{5}{2}; \frac{\sqrt{11}}{2}\right)$ — точки эллипса;

2) точка $M(3; -2\sqrt{3})$ принадлежит эллипсу, $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}$;

3) $2a = 20$, $\varepsilon = \frac{3}{5}$;

4) расстояние между фокусами равно 4, расстояние между директрисами равно 5.

4.3.34. Найти уравнение касательной к эллипсу $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$, перпендикулярной прямой $x - y + 50 = 0$.

◑ Уравнение касательной будем искать в виде $y = kx + c$. Ее угловой коэффициент k найдем из условия $k \cdot k_1 = -1$ перпендикулярности прямых, где k_1 — угловой коэффициент прямой $x - y + 50 = 0$. Так как $k_1 = 1$, то $k = -1$, уравнение касательной к эллипсу имеет вид $y = -x + c$. Общие точки прямой и эллипса находим, решая систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{20} + \dfrac{y^2}{5} = 1, \\ y = -x + c. \end{cases}$$

Получаем $\frac{x^2}{20} + \frac{x^2 - 2cx + c^2}{5} = 1$, т. е. $5x^2 - 8cx + 4c^2 - 20 = 0$. Уравнение имеет единственное решение (прямая касается эллипса, т. е. имеет с ним единственную общую точку) лишь в случае, когда его дискриминант равен нулю, т. е.

$$64c^2 - 4 \cdot 5(4c^2 - 20) = 0$$

или $4c^2 - 5(c^2 - 5) = 0$. Значит, есть два решения: $c_1 = 5$ и $c_2 = -5$. Условию задачи удовлетворяют две касательные: $y = -x + 5$ и $y = -x - 5$. ●

4.3.35. При каких значениях α прямая $y = x - \alpha$ пересекает эллипс $x^2 + 2y^2 - 4 = 0$? Касается его?

4.3.36. Эллипс касается оси Oy в точке $A(0; 2)$ и пересекает ось Ox в точках $B(4; 0)$ и $C(10; 0)$. Составить уравнение эллипса, если оси его параллельны осям координат.

4.3.37. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси Oy, а малая ось равна $2\sqrt{3}$. Каждый из фокусов равноудален от центра эллипса и от ближайшего конца фокальной оси.

◑ Уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $b > a$. По условию задачи $2a = 2\sqrt{3}$, т. е. $a = \sqrt{3}$, и $c = \frac{b}{2}$. Так как

$c^2 = b^2 - a^2$ (3.9), то получаем: $\frac{b^2}{4} = b^2 - 3$, т. е. $b^2 = 4$. Таким образом, уравнение эллипса есть $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$. ●

4.3.38. Составить уравнение эллипса, фокусы которого расположены на оси Oy, симметрично относительно начала координат, если:
1) его полуоси равны 5 и 8;
2) $2c = 24$, $\varepsilon = \frac{12}{13}$.

Дополнительные задачи

4.3.39. Найти длину диаметра (хорда, проходящая через центр) эллипса $3x^2 + 8y^2 = 22$, делящего угол между осями координат пополам.

4.3.40. Найти координаты точек эллипса $16x^2 + 25y^2 - 400 = 0$, для которых расстояние от левого фокуса в два раза больше расстояния от правого фокуса.

4.3.41. Найти длину хорды эллипса $x^2 + 10y^2 - 10 = 0$, проходящей через его фокус параллельно малой оси.

4.3.42. Найти длину хорды эллипса $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{44} = 1$, направленной по диагонали прямоугольника, построенного на осях эллипса.

4.3.43. Найти координаты точек эллипса $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$, в которых фокальные радиусы перпендикулярны.

4.3.44. Определить траекторию перемещения точки M, которая при своем движении остается одинаково удаленной от точки $A(2;0)$ и от окружности $x^2 + y^2 = 16$.

4.3.45. Определить траекторию перемещения точки M, которая при своем движении остается вдвое ближе к точке $A(-1;0)$, чем к прямой $x - 8 = 0$.

4.3.46. В эллипс $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ вписан правильный треугольник, одна из вершин которого совпадает с правой вершиной эллипса. Найти координаты двух других вершин треугольника.

4.3.47. В эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вписан квадрат так, что стороны его параллельны осям эллипса. Найти площадь квадрата.

4.3.48. Найти уравнения касательных к эллипсу $x^2 + 2y^2 = 3$, параллельных прямой $x - 2y + 1 = 0$.

4.3.49. Найти координаты точки эллипса $4x^2 + 9y^2 - 72 = 0$, наиболее удаленной от прямой $2x - 3y - 1 = 0$, вычислить расстояние от этой точки до данной прямой.

4.3.50. Найти координаты точки эллипса $9x^2 + 25y^2 = 450$, расстояние от которой до правого фокуса в 4 раза больше расстояния до левого фокуса.