Контрольные вопросы и более сложные задачи

4.3.51. Вывести условие, при котором прямая $Ax+By+C=0$ касается эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

4.3.52. Доказать оптическое свойство эллипса: луч света, выходящий из одного фокуса эллипса, отразившись от него, проходит через второй фокус.

Указание. показать, что касательная к эллипсу образует равные углы с фокальными радиусами точки касания.

4.3.53. Эллипс, симметричный относительно осей прямоугольной системы координат, касается двух прямых $x+2y-\sqrt{39}=0$ и $x-3y+7=0$. Найти его уравнение.

4.3.54. Отрезок постоянной длины скользит своими концами по сторонам прямого угла. Найти уравнение кривой, описываемой фиксированной точкой M этого отрезка.

4.3.55. Доказать, что отношение расстояний от любой точки эллипса до фокуса и соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная ε.

4.3.56. Чему равен эксцентриситет земного меридиана, имеющего форму эллипса, отношение осей которого равно $\frac{299}{300}$?

4.3.57. Сколько касательных можно провести к эллипсу $4x^2+5y^2-80=0$ из точки $M_1(0;4)$, $M_2(1;2)$, $M_3(5;3)$?

4.3.58. Чему равен эксцентриситет эллипса, у которого малая ось равна расстоянию между фокусами?

4.3.59. Чему равен периметр четырехугольника, вершины которого совпадают с вершинами эллипса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$?

Гипербола

⇛ *Гиперболой* называется множество всех точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух заданных точек этой же плоскости, называемых ***фокусами***, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

Каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{3.12}$$

где a — ***действительная***, b — ***мнимая полуось*** гиперболы. Числа $2a$ и $2b$ называются соответственно ***действительной*** и ***мнимой осями*** гиперболы. Координаты фокусов: $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$, c — половина расстояния

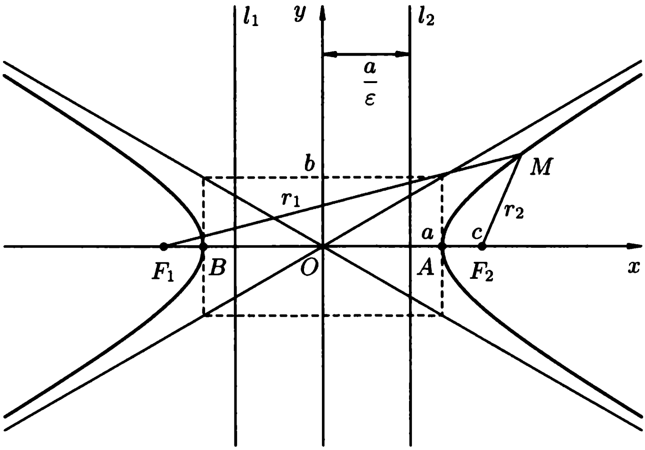

Рис. 35

между фокусами (рис. 35). Числа a, b и c связаны соотношенем

$$c^2 = a^2 + b^2. \tag{3.13}$$

Точки A и B называются ***вершинами*** гиперболы, точка O — ***центром*** гиперболы, расстояния r_1 и r_2 от произвольной точки M гиперболы до ее фокусов называются ***фокальными радиусами*** этой точки.

⇛ $$\text{Число} \quad \varepsilon = \frac{c}{a} \qquad (\varepsilon > 1, \text{ т.к. } c > a). \tag{3.14}$$

называется ***эксцентриситетом*** гиперболы.

Фокальные радиусы определяются формулами: для точек правой ветви гиперболы:

$$r_1 = a + \varepsilon x, \quad r_2 = -a + \varepsilon x; \tag{3.15}$$

для точек левой ветви:

$$r_1 = -a - \varepsilon x, \quad r_2 = a - \varepsilon x. \tag{3.16}$$

⇛ Прямоугольник, центр которого совпадает с точкой O, а стороны равны и параллельны осям гиперболы называется ***основным прямоугольником гиперболы***. Диагонали основного прямоугольника гиперболы лежат на двух прямых, называемых ***асимптотами гиперболы***; они определяются уравнениями

$$y = \pm\frac{b}{a}\,x. \tag{3.17}$$

⇛ Две прямые l_1 и l_2, параллельные мнимой оси гиперболы и отстоящие от нее на расстоянии, равном $\frac{a}{\varepsilon}$, называются ***директрисами гиперболы***. Их уравнения

$$x = \frac{a}{\varepsilon} \quad \text{и} \quad x = -\frac{a}{\varepsilon}. \tag{3.18}$$

Замечания. 1) Если $a = b$, то гипербола (3.12) называется ***равносторонней (равнобочной)***. Ее уравнение принимает вид

$$x^2 - y^2 = a^2. \tag{3.19}$$

2) если фокусы гиперболы лежат на оси Oy, то уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1. \tag{3.20}$$

Эксцентриситет этой гиперболы равен $\varepsilon = \frac{c}{b}$, асимптоты определяются уравнениями $y = \pm\frac{b}{a}x$, а уравнения директрис $y = \pm\frac{b}{\varepsilon}$. Гипербола (3.20) называется ***сопряженной*** гиперболе (3.12); она имеет вид, изображенный на рисунке 36;

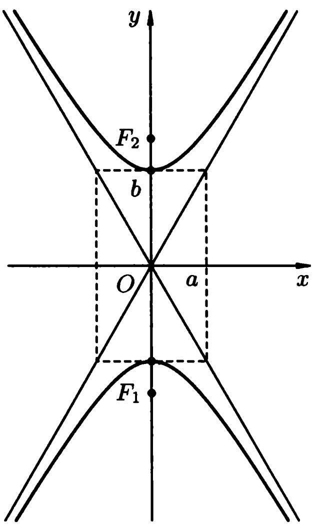

Рис. 36

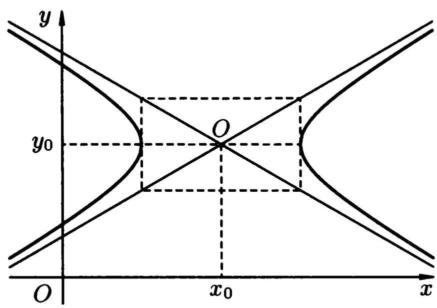

Рис. 37

3) уравнение гиперболы с осями, параллельными координатным, имеет вид

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1, \tag{3.21}$$

где $(x_0; y_0)$ — координаты центра гиперболы (рис. 37).

4.3.60. Дано уравнение гиперболы $5x^2 - 4y^2 = 20$. Найти:

1) длины его полуосей;

2) координаты фокусов;

3) эксцентриситет гиперболы;

4) уравнения асимптот и директрис;

5) фокальные радиусы точки $M(3; 2{,}5)$.

❍ Разделив обе части уравнения на 20, приведем уравнение гиперболы к каноническому виду (3.12):

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1.$$

Отсюда:

1) $a^2 = 4$, $b^2 = 5$, т. е. $a = 2$, $b = \sqrt{5}$;

2) используя соотношение (3.13), находим $c^2 = 4 + 5$, т. е. $c = 3$. Отсюда находим фокусы гиперболы: $F_1(-3; 0)$ и $F_2(3; 0)$;

3) по формуле (3.14) находим $\varepsilon = \frac{3}{2}$;

4) уравнения асимптот и директрис найдем по формулам (3.17) и (3.18): $y = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}x$ и $x = \pm\frac{4}{3}$;

5) точка M лежит на правой ветви гиперболы ($x = 3 > 0$), воспользуемся формулами (3.15): $r_1 = 2 + \frac{3}{2}\cdot 3 = 6{,}5$, $r_2 = -2 + \frac{3}{2}\cdot 3 = 2{,}5$. ●

4.3.61. Составить уравнение гиперболы, если ее фокусы лежат на оси Oy и расстояние между ними равно 10, а длина действительной оси равна 8.

❍ Искомое уравнение гиперболы имеет вид (3.20). Согласно условию $2c = 10$, $c = 5$; $2b = 8$, $b = 4$. Из соотношения (3.13) найдем мнимую полуось a: $25 = a^2 + 16$, $a^2 = 9$, $a = 3$. Получаем $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$ — уравнение гиперболы. ●

4.3.62. Составить каноническое уравнение гиперболы, если:

1) $2c = 10$, $a = 3$;

2) $c = 3$, $\varepsilon = 1{,}5$;

3) $b = 6$, уравнения асимптот $y = \pm\frac{5}{3}x$.

4.3.63. Написать каноническое уравнение гиперболы, если:

1) $c = 10$ и уравнения асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$;

2) $\varepsilon = \frac{3}{2}$ и расстояние между директрисами равно $\frac{8}{3}$;

3) $\varepsilon = \sqrt{2}$ и точка $M(\sqrt{3}; \sqrt{2})$ лежит на гиперболе.

4.3.64. Найти уравнение гиперболы, фокусы которой находятся в точках $F_1(-2; 4)$ и $F_2(12; 4)$, а длина мнимой оси равна 6.

❍ Центр гиперболы лежит на прямой $y = 4$, параллельной оси Ox. Уравнение гиперболы имеет вид (3.21). По условию $2b = 6$, $b = 3$. Расстояние между фокусами равно 14, т. е. $2c = 14$, $c = 7$. Используя соотношение $c^2 = a^2 + b^2$, находим a: $49 = a^2 + 9$, $a = 2\sqrt{10}$. Центр гиперболы делит расстояние между фокусами пополам. Поэтому $x_0 = \dfrac{-2+12}{2} = 5$, $y_0 = \dfrac{4+4}{2} = 4$. Записываем уравнение гиперболы: $\dfrac{(x-5)^2}{40} - \dfrac{(y-4)^2}{9} = 1$. ●

4.3.65. Найти каноническое уравнение гиперболы с фокусами на оси Ox, проходящей через точки $M_1(6;-1)$ и $M_2(-8;-2\sqrt{2})$.

4.3.66. Найти уравнение гиперболы, симметричной относительно осей координат, зная, что ее мнимая полуось равна 2 и гипербола проходит через точку $M(4;-\frac{2\sqrt{3}}{3})$. Найти расстояние от точки M до правого фокуса.

4.3.67. Найти угол между асимптотами гиперболы, если ее эксцентриситет равен 2.

◑ Уравнения асимптот гиперболы имеют вид $y = \pm\frac{b}{a}x$. Найдем отношение $\frac{b}{a}$, воспользовавшись формулами (3.13), (3.14) и условием $\varepsilon = 2$: $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}$. Отсюда $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \varepsilon^2 - 1$, т.е. $\frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2-1}$. Имеем: $\frac{b}{a} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$. Стало быть, уравнения асимптот гиперболы есть $y = \sqrt{3}x$ и $y = -\sqrt{3}x$. Угол φ между асимптотами найдем по формуле $\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right| = \left|\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{1-3}\right| = \sqrt{3}$, $\varphi = 60°$. ●

4.3.68. Составить уравнения асимптот гиперболы $\frac{(y+3)^2}{9} - \frac{(x-2)^2}{16} = 1$, построить ее.

4.3.69. Дан эллипс $5x^2 + 8y^2 = 40$. Найти уравнение гиперболы, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы — в вершинах данного эллипса.

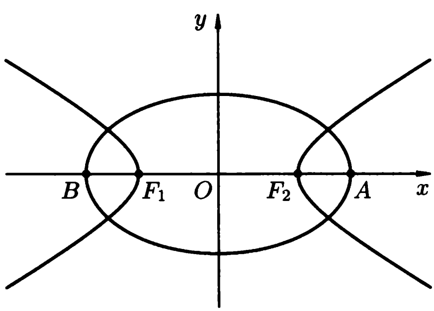

Рис. 38

◑ Найдем координаты вершин A и B и фокусов эллипса, записав его уравнение в канонической форме $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{5} = 1$. Имеем

$a^2 = 8$, $a = 2\sqrt{2}$; $b^2 = 5$, $b = \sqrt{5}$. Из соотношения $c^2 = a^2 - b^2$ находим c: $c^2 = 8 - 5$, $c = \sqrt{3}$. Можно записать: $A(2\sqrt{2}; 0)$, $B(-2\sqrt{2}; 0)$, $F_1(-\sqrt{3}; 0)$, $F_2(\sqrt{3}; 0)$ (рис. 38). Обозначим через $a_г$, $b_г$, $c_г$ — соответственно полуоси гиперболы и половину расстояния между ее фокусами. Тогда, согласно условиям задачи, можно записать: $a_г = OF_2$, т.е. $a_г = \sqrt{3}$ и $c_г = OA$, т.е. $c_г = 2\sqrt{2}$. Из соотношения $c_г^2 = a_г^2 + b_г^2$ находим $8 = 3 + b_г^2$, поэтому $b_г^2 = 5$, $b_г = \sqrt{5}$. Подставляя найденные значения $a_г$ и $b_г$ в уравнение (3.12), находим $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = 1$ — искомое уравнение гиперболы. ●

4.3.70. Дана гипербола $\frac{x^2}{13} - \frac{y^2}{3} = 1$. Найти софокусный эллипс, проходящий через точку $M\left(4; -\frac{9}{5}\right)$.

Дополнительные задачи

4.3.71. Найти эксцентриситет гиперболы, зная, что расстояние между фокусами в 4 раза больше расстояния между ее директрисами.

4.3.72. На гиперболе $9x^2 - 16y^2 = 144$ найти точку, для которой расстояние от левого фокуса в 3 раза больше, чем от правого.

4.3.73. Найти уравнения касательных к гиперболе $9x^2 - 8y^2 = 72$, проведенных из точки $C(2; 0)$.

4.3.74. Найти уравнения касательных к гиперболе $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$, параллельных прямой $x + y - 4 = 0$.

4.3.75. Построить линию:

а) $9x^2 - 16y^2 - 36x - 32y - 124 = 0$;

б) $\begin{cases} x = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}), \\ y = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}). \end{cases}$

4.3.76. Доказать,что длина перпендикуляра, опущенного из фокуса на одну из асимптот гиперболы, равна мнимой полуоси.

4.3.77. Доказать, что произведение расстояний от любой точки гиперболы $x^2 - y^2 = 4$ до двух ее асимптот есть величина постоянная, равная 2.

4.3.78. Найти площадь треугольника, образованного асимптотами гиперболы $9x^2 - 4y^2 = 36$ и прямой $9x + 2y - 12 = 0$.

4.3.79. Вершины квадрата лежат на гиперболе $9x^2 - 4y^2 = 125$. Найти его площадь.

4.3.80. Найти эксцентриситет гиперболы, асимптота которой составляет с действительной осью угол α.

11 – 2361

4.3.81. Найти расстояние между точками пересечения асимптот гиперболы $9x^2 - 16y^2 = 144$ с окружностью, имеющей центр в правом фокусе гиперболы и проходящей через начало координат.

4.3.82. Найти траекторию пути точки M, которая при своем движениии остается вдвое ближе к прямой $x - 2 = 0$, чем к точке $A(8;0)$.

4.3.83. На гиперболе $x^2 - y^2 = 1$ найти точку, фокальные радиусы которой перпендикулярны.

4.3.84. Найти расстояние между левым фокусом F_1 гиперболы $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ и правым фокусом F_2 сопряженной с ней гиперболы.

4.3.85. Найти фокальные радиусы точки $M(10;3\sqrt{6})$, лежащей на гиперболе $\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{6} = 1$. Найти расстояния от точки M до директрис.

4.3.86. На гиперболе $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ найти точку M, ближайшую к прямой $2x + y - 2 = 0$, и вычислить расстояние от точки до этой прямой.

4.3.87. Через левый фокус гиперболы $x^2 - y^2 = 8$ проведем перпендикуляр к ее оси, содержащей вершины. Найти расстояния от фокусов до точек пересечения этого перпендикуляра с гиперболой.

4.3.88. При каких значениях α прямая $y = 2x + \alpha$ пересекает гиперболу $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{18} = 1$? Касается ее?

4.3.89. Составить уравнение гиперболы, зная ее эксцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{4}$, фокус $F_2(5;0)$.

4.3.90. Составить уравнение гиперболы, зная ее фокусы $F_1(-8;2)$, $F_2(12;2)$ и расстояние между вершинами, равное 16.

4.3.91. Дан эллипс $\frac{x^2}{14} + \frac{y^2}{5} = 1$. Найти уравнение софокусной равнобочной геперболы.

4.3.92. Фокусы гиперболы совпадают с фокусами эллипса $9x^2 + 25y^2 = 225$. Найти уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет равен 2.

Контрольные вопросы и более сложные задачи

4.3.93. Вывести условие, при котором прямая $Ax + By + C = 0$ касается гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

4.3.94. Найти уравнение гиперболы, симметричной относительно осей координат и касающейся прямой $x - y - 2 = 0$ в точке $M(4;2)$.