4.3.95. Даны точки $A(-1;0)$ и $B(2;0)$. Точка $M(x;y)$ движется так, что в треугольнике AMB угол B остается вдвое больше угла A. Найти уравнение траектории движения точки M.

4.3.96. Доказать, что отношение расстояний от любой точки гиперболы до фокуса и до соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная ε.

4.3.97. Эксцентриситет гиперболы равен 3, фокальный радиус ее точки M, проведенный из некоторого фокуса, равен 12. Найти расстояние от точки M до односторонней с этим фокусом директрисы.

4.3.98. Доказать, что касательная к гиперболе в ее произвольной точке M составляет равные углы с фокальными радиусами этой точки.

4.3.99. Доказать оптическое свойство гиперболы: луч света, исходящий из одного фокуса гиперболы, отразившись от нее, идет по прямой, соединяющей точку отражения с другим фокусом.

4.3.100. Можно ли к гиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ провести касательные любого направления? Какое ограничение наложено на угловые коэффициенты касательных к этой гиперболе?

4.3.101. Какие линии определяются следующими уравнениями:
1) $y = -2\sqrt{x^2+1}$;
2) $x = -\sqrt{y^2+4}$?

4.3.102. Чему равен угол между асимптотами гиперболы $y^2 = 100 + x^2$?

4.3.103. Чему равна площадь треугольника, образованного асимптотами гиперболы $x^2 - y^2 = 1$ и прямой $x = 2$?

4.3.104. Проходит ли гипербола $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{2} = 1$ через точки $O(2;0)$, $A(-2\sqrt{10};2)$, $B\left(6;\frac{2}{5}\sqrt{10}\right)$?

Парабола

⇛ *Параболой* называется множество всех точек плоскости, каждая из которых равноудалена от заданной точки этой же плоскости, называемой *фокусом*, и заданной прямой, называемой *директрисой*.

Каноническое уравнение параболы имеет вид

$$y^2 = 2px, \qquad (3.22)$$

где число $p > 0$, равное расстоянию от фокуса F до директрисы l, называется *параметром* параболы. Координаты фокуса $F\left(\frac{p}{2};0\right)$. Точка $O(0;0)$ называются *вершиной* параболы, длина r отрезка FM — *фокальный радиус* точки M, ось Ox — *ось симметрии* параболы.

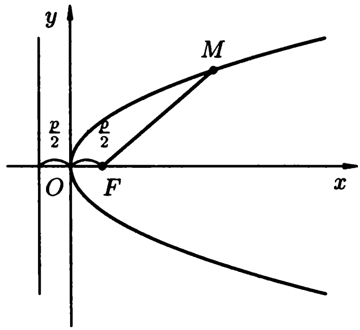

Рис. 39

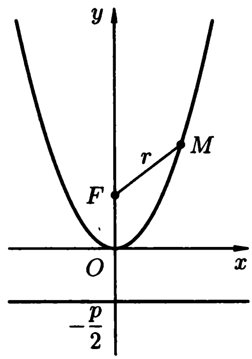

Рис. 40

Уравнение директрисы l параболы имеет вид

$$x = -\frac{p}{2}; \tag{3.23}$$

фокальный радиус вычисляется по формуле

$$r = x + \frac{p}{2}. \tag{3.24}$$

В прямоугольной системе координат парабола, заданная каноническим уравнением (3.22), расположена так, как указано на рисунке 39.

Замечания. 1) Парабола, симметричная относительно оси Oy и проходящая через начало координат (рис. 40), имеет уравнение

$$x^2 = 2py. \tag{3.25}$$

Фокусом параболы (3.25) является точка

$$F\left(0; \frac{p}{2}\right). \tag{3.26}$$

Уравнение директрисы этой параболы

$$y = -\frac{p}{2}. \tag{3.27}$$

Фокальный радиус точки M параболы

$$r = y + \frac{p}{2}. \tag{3.28}$$

2) На рисунках 41 и 42 изображены графики парабол $y^2 = -2px$ и $x^2 = -2py$ соответственно.

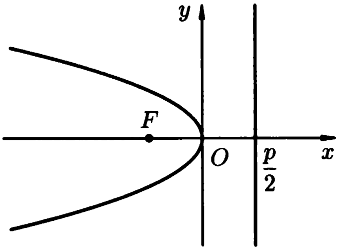

Рис. 41

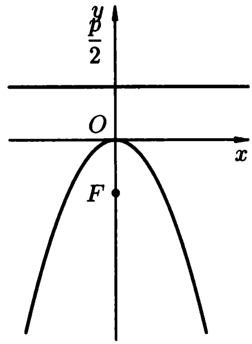

Рис. 42

3) На рисунках 43–46 приведены уравнения и графики парабол с осями симметрии, параллельными координатным осям.

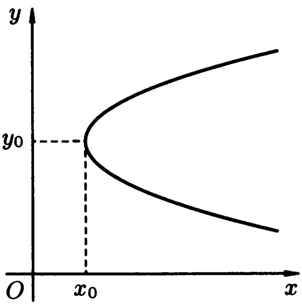

Рис. 43. $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$

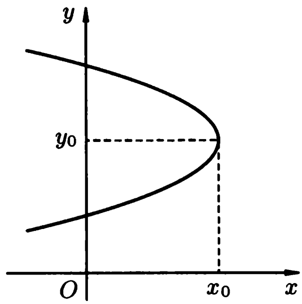

Рис. 44. $(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$

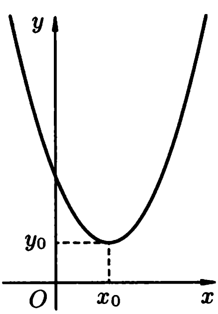

Рис. 45. $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$

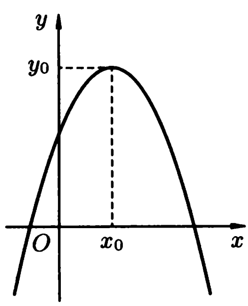

Рис. 46. $(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$

4.3.105. Дана парабола $x^2 = 4y$. Найти координаты ее фокуса, уравнение директрисы, длину фокального радиуса точки $M(4;4)$.

◔ Парабола задана каноническим уравнением (3.25). Следовательно, $2p = 4$, $p = 2$. Используя формулы (3.26), (3.27), (3.28) находим, что фокус имеет координаты $(0;1)$, т. е. $F(0;1)$; уравнение директрисы есть $y = -1$; фокальный радиус точки $M(4;4)$ равен $r = 4 + 1 = 5$. ●

4.3.106. Найти вершину, фокус и директрису параболы $y = -2x^2 + 8x - 5$, построить эскиз графика.

◔ Преобразуем уравнение $y = -2x^2+8x-5$, выделив в правой части полный квадрат:

$$y = -2\left(x^2 - 4x + \frac{5}{2}\right) = -2\left(x^2 - 4x + 4 - 4 + \frac{5}{2}\right) =$$
$$= -2\left((x-2)^2 - \frac{3}{2}\right) = -2(x-2)^2 + 3,$$

т. е. $y = -2(x-2)^2+3$ или $(x-2)^2 = -\frac{1}{2}(y-3)$. Уравнение параболы имеет вид, как на рис. 46. Вершина параболы имеет координаты $(2;3)$; $2p = \frac{1}{2}$, $p = \frac{1}{4}$. Прямая $x = 2$ является осью симметрии параболы. Координаты фокуса $x = 2$, $y = 3 - \frac{1}{8} = 2\frac{7}{8}$, т. е. $F\left(2;2\frac{7}{8}\right)$. Уравнение директрисы $y = 3 + \frac{p}{2} = 3 + \frac{1}{8}$, т. е. $y = 3\frac{1}{8}$. График изображен на рис. 47. ●

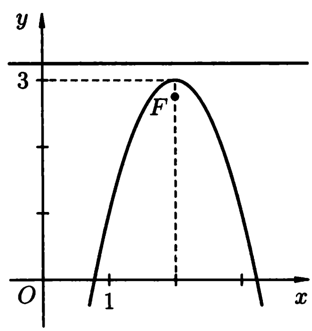

Рис. 47

4.3.107. Парабола симметрична относительно оси Ox, ее вершина находится в начале координат. Составить уравнение параболы, зная, что она проходит через точку $A(-3;-3)$.

4.3.108. Найти высоту арки моста длиной 24м, имеющей форму параболы, уравнение которой $x^2 = -48y$.

4.3.109. Найти уравнение касательной к параболе $y^2 = 4x$, проведенной из точки $A(-2; -1)$.

Уравнение прямой будем искать в виде

$$y = kx + b. \tag{3.29}$$

Так как точка A принадлежит искомой касательной, подставляя ее координаты в уравнение (3.29), получим тождество

$$-1 = -2k + b. \tag{3.30}$$

Далее, прямая (3.29) и парабола $y^2 = 4x$ имеют единственную общую точку (касаются). Следовательно, система уравнений

$$\begin{cases} y = kx + b, \\ y^2 = 4x \end{cases}$$

имеет единственное решение. Решаем ее относительно x и y. Это можно сделать различными способами, например, возвести правую и левую части первого уравнения в квадрат и подставить в левую часть полученного равенства вместо y^2 его выражение из второго уравнения. Получим $k^2x^2 + 2kbx + b^2 = 4x$. Это — квадратное уравнение, имеющее единственное решение в случае, когда дискриминант равен нулю. Таким образом,

$$\frac{D}{4} = (kb-2)^2 - k^2b^2 = 0 \quad \text{или} \quad 4kb = 4, \quad b = \frac{1}{k}. \tag{3.31}$$

Теперь для параметров k и b прямой (3.29) имеем два условия: (3.30) и (3.31). Следовательно, искомые значения параметров находятся как решения системы из этих условий:

$$\begin{cases} -2k + b = -1, \\ b = \frac{1}{k}. \end{cases}$$

Подстановкой вместо b в первое уравнение его выражения из второго, получим $-2k^2 + k + 1 = 0$, откуда находим, что $k_1 = 1$, $k_2 = -\frac{1}{2}$. Система имеет два решения:

$$\begin{cases} k_1 = 1, \\ b_1 = 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} k_2 = -1/2, \\ b_2 = -2. \end{cases}$$

Следовательно, две прямые удовлетворяют условиям задачи. Их уравнения: $y = x + 1$ и $y = -\frac{x}{2} - 2$. ●

4.3.110. К параболе $y^2 = 4x$ проведена касательная параллельно прямой $2x - y + 7 = 0$. Найти уравнение этой касательной.

4.3.111. При каких значениях k прямая $y = kx - 1$ пересекает параболу $y^2 = -5x$? Касается ее?

Дополнительные задачи

4.3.112. Составить уравнение параболы, симметричной относительно оси Oy, имеющей вершину в начале координат, если она проходит через точку $A(-2;4)$.

4.3.113. Найти координаты такой точки параболы $y^2 = 6x$, которая находится от директрисы на расстоянии 3,5.

4.3.114. Через фокус параболы $y^2 = 12x$ проведена хорда, перпендикулярная к ее оси. Найти длину хорды.

4.3.115. В параболу $y^2 = 2px$ вписан равносторонний треугольник, одна из вершин которого совпадает с вершиной параболы. Найти длину стороны треугольника.

4.3.116. Найти длину хорды, соединяющей точки пересечения двух парабол, имеющих общую вершину в начале координат, а фокусы в точках $(2;0)$ и $(0;2)$.

4.3.117. Трос, подвешенный за два конца на одинаковой высоте, имеет форму дуги параболы. Расстояние между точками крепления 24 м. Глубина прогиба троса на расстоянии 3 м от точки крепления равна 70 см. Определить глубину прогиба троса посередине между креплениями.

4.3.118. Камень, брошенный под углом к горизонту, достиг наибольшей высоты 16 м. Описав параболическую траекторию, он упал в 48 м от точки бросания. На какой высоте находился камень на расстоянии 6 м по горизонтали от точки бросания?

4.3.119. На параболе $y^2 = -4x$ найти координаты точки, расстояние от которой до прямой $y = 1 + 3\sqrt{2} - x$ равно 3.

4.3.120. Парабола $y^2 = x$ отсекает от прямой, проходящей через начало координат, хорду, длина которой равна $\sqrt{2}$. Составить уравнение этой прямой.

4.3.121. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, фокус которой находится в точке пересечения прямой $5x - 3y + 12 = 0$ с осью ординат; осью абсцисс.

4.3.122. Составить уравнение параболы, симметричной относительно оси Oy и проходящей через точку пересечения прямой $y - x = 0$ и окружности $x^2 + y^2 - 4y = 0$.

4.3.123. Дана парабола $x^2 = 8y$. Найти длину ее хорды, проходящей через точку $A(1;1)$ перпендикулярно прямой $2x - y + 3 = 0$.

4.3.124. Уравнение линии привести к каноническому виду, построить ее:

а) $y = 4x^2 + 8x + 7$;

б) $x = 5y^2 - 10y + 6$;

в) $y = x^2 - 4x + 5$;

г) $x = y^2 + 3y$.

4.3.125. Найти уравнение линии, все точки которой одинаково удалены от точки $O(0;0)$ и от прямой $x+4=0$.

4.3.126. Найти уравнение прямой, которая проходит через вершину параболы $y=-2x^2-6x-4$ параллельно прямой $2x-y+3=0$.

4.3.127. Дана парабола $y^2=12x$. Найти длину ее хорды, проходящей через точку $A(8;0)$ и наклоненной к оси Ox под углом $60°$.

4.3.128. Составить уравнение касательной к параболе $y^2=36x$, проведенной из точки $A(1;10)$.

4.3.129. К параболе $y^2=36x$ проведены из точки $A(1;10)$ две касательные. Составить уравнение хорды, соединяющей точки касания.

Контрольные вопросы и более сложные задачи

4.3.130. Доказать оптическое свойство параболы: луч света, исходящий из фокуса параболы, отразившись от нее, идет по прямой, параллельной оси этой параболы.

4.3.131. Доказать, что касательная к параболе в ее произвольной точке M составляет равные углы с фокальным радиусом точки M и с лучом, исходящим из точки M и сонаправленным с осью параболы.

4.3.132. Из фокуса параболы $y^2=12x$ под острым углом α к оси Ox направлен луч света. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$. Дойдя до параболы, луч от нее отразился. Составить уравнение прямой, на которой лежит отраженный луч.

4.3.133. Дана парабола $y^2=4x$. Через точку $\left(\frac{5}{2};1\right)$ провести такую хорду, которая делилась бы в этой точке пополам. Составить уравнение этой хорды.

4.3.134. Показать, что фокус параболы и точки касания двух касательных к параболе, проведенных из любой точки директрисы, лежат на одной прямой.

4.3.135. Каково будет уравнение параболы $y^2=4x$, если ее ось симметрии повернуть на $90°$? на $180°$? на $-90°$?

4.3.136. Каково уравнение параболы с вершиной в точке $(0;0)$, если уравнение ее директрисы $2y+7=0$?

4.3.137. Найти фокус и директрису кривой, заданной параметрически

$$\begin{cases} x=\dfrac{2}{t^2}, \\ y=\dfrac{3}{t}. \end{cases}$$

4.3.138. Решить графически систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y=4, \\ x+y^2=9. \end{cases}$$