# Глава 5. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

## § 1. МЕТОД КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ

### Прямоугольная система координат. Основные задачи

Положение любой точки в пространстве можно однозначно определить с помощью прямоугольной системы координат. Эта система включает три взаимно перпендикулярные оси, пересекающиеся в одной точке $O$ — *начале координат.* Одну из осей называют *осью абсцисс* (ось $Ox$), другую — *осью ординат* ($Oy$), третью — *осью аппликат* ($Oz$). На каждой из осей выбраны *единичные векторы*, которые обозначают соответственно $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$. Если $M$ — произвольная точка пространства, то вектор $\overline{OM}$ называется *радиусом-вектором* точки $M$ (см. рис. 48).

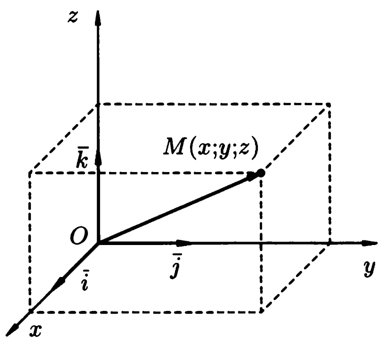


Рис. 48

⇛ *Координатами точки $M$* в системе координат $Oxyz$ называются координаты радиус-вектора $\overline{OM}$. Если $\overline{OM} = (x; y; z)$ (рис. 48), то координаты точки $M$ записывают так: $M(x; y; z)$; здесь число $x$ — *абсцисса*, $y$ — *ордината*, $z$ — *аппликата* точки $M$. Каждой тройке чисел $(x; y; z)$ соответствует одна и только одна точка пространства, и наоборот.

*Расстояние между двумя точками* $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$ вычисляется по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (1.1)$$

Координаты $(x; y; z)$ *точки $M$, делящей в заданном отношении* $\lambda$ $\left(\lambda = \frac{|AM|}{|MB|}\right)$ *отрезок* $AB$, $(A(x_1; y_1; z_1),\ B(x_2; y_2; z_2))$, определяются по формулам

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \tag{1.2}$$

В частности, при $\lambda = 1$ (точка $M$ делит отрезок $AB$ пополам), получаются формулы для определения координат середины отрезка

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \tag{1.3}$$

**5.1.1.** На оси $Oy$ найти точку, равноудаленную от двух точек $A(2;3;1)$ и $B(-1;5;-2)$.

○ Точка $M$, лежащая на оси $Oy$, имеет координаты $M(0;y;0)$. По условию задачи $|AM| = |BM|$. Найдем расстояния $|AM|$ и $|BM|$, используя формулу (1.1):

$$|AM| = \sqrt{(0-2)^2 + (y-3)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{y^2 - 6y + 14}\,;$$

$$|BM| = \sqrt{(0+1)^2 + (y-5)^2 + (0+2)^2} = \sqrt{y^2 - 10y + 30}\,.$$

Получим уравнение

$$\sqrt{y^2 - 6y + 14} = \sqrt{y^2 - 10y + 30}\,.$$

Отсюда находим, что $4y = 16$, т. е. $y = 4$. Искомая точка есть $M(0;4;0)$. ●

**5.1.2.** Найти координаты точки на плоскости $Oxy$, равноудаленной от трех точек: $A(4;0;2)$, $B(-1;2;4)$, $C(1;1;-3)$.

**5.1.3.** Показать, что треугольник с вершинами в точках $A(-3;2;4)$, $B(0;-2;-1)$, $C(1;5;9)$ равнобедренный.

**5.1.4.** Отрезок $AB$ разделен на 3 равные части. Найти координаты точек деления, если известны точки $A(-2;4;1)$ и $B(2;-4;-3)$.

○ Обозначим точки деления отрезка $AB$ в следующем порядке: $C$ и $D$. По условию задачи $|AC| = |CD| = |DB|$. Поэтому точка $C$ делит отрезок $AB$ в отношении $\lambda = \frac{1}{2}$. Пользуясь формулами (1.2), находим координаты точки $C$:

$$x_C = \frac{-2 + \frac{1}{2}\cdot 2}{1 + \frac{1}{2}} = -\frac{2}{3}, \quad y_C = \frac{4 + \frac{1}{2}\cdot(-4)}{1+\frac{1}{2}} = \frac{4}{3},$$

$$z_C = \frac{1 + \frac{1}{2}\cdot(-3)}{1+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}.$$

Имеем, $C\left(-\frac{2}{3};\frac{4}{3};-\frac{1}{3}\right)$. По формулам (1.3) находим координаты точки $D$ — середины отрезка $CB$:

$$x_D = \frac{-\frac{2}{3}+2}{2} = \frac{2}{3}, \quad y_D = \frac{\frac{4}{3}-4}{2} = -\frac{4}{3}, \quad z_D = \frac{-\frac{1}{3}-3}{2} = -\frac{5}{3},$$

т. е. точка $D$ имеет координаты $\left(\frac{2}{3};-\frac{4}{3};-\frac{5}{3}\right)$. ●

**5.1.5.** Дана точка $A(3;-4;2)$. Найти координаты точки, симметричной данной относительно координатных плоскостей, осей координат, начала координат.

**5.1.6.** Дан треугольник с вершинами в точках $A(5;2;4)$, $B(-3;6;0)$, $C(3;2;-4)$. Найти длину его медианы, проведенной из вершины $A$.

**5.1.7.** В точках $A_1(x_1;y_1;z_1)$, $A_2(x_2;y_2;z_2)$, $A_3(x_3;y_3;z_3)$, $A_4(x_4;y_4;z_4)$ сосредоточены соответственно массы $m_1$, $m_2$, $m_3$, $m_4$. Найти координаты центра тяжести системы этих масс.

◐ Как известно из курса физики центр тяжести масс $m_1$ и $m_2$, помещенных в точках $A$ и $B$, делит отрезок $AB$ на части, обратно пропорциональные массам, сосредоточенным на концах отрезка $(\lambda = \frac{m_2}{m_1})$. Исходя из этого, найдем сначала центр тяжести $M_1(x';y';z')$ системы двух масс $m_1$ и $m_2$, помещенных в точках $A_1$ и $A_2$:

$$x' = \frac{x_1 + \frac{m_2}{m_1}x_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} = \frac{x_1m_1 + x_2m_2}{m_1 + m_2},$$

$$y' = \frac{y_1m_1 + y_2m_2}{m_1 + m_2}, \qquad z' = \frac{z_1m_1 + z_2m_2}{m_1 + m_2}.$$

Центр тяжести системы трех масс $m_1$, $m_2$ и $m_3$ находим аналогично $(\lambda = \frac{m_3}{m_1 + m_2})$:

$$x'' = \frac{x' + \frac{m_3}{m_1+m_2}x_3}{1 + \frac{m_3}{m_1+m_2}} = \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + x_3m_3}{m_1 + m_2 + m_3},$$

$$y'' = \frac{y_1m_1 + y_2m_2 + y_3m_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \qquad z'' = \frac{z_1m_1 + z_2m_2 + z_3m_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Находим, наконец, центр тяжести системы трех масс $m_1$, $m_2$, $m_3$ и $m_4$ $(\lambda = \frac{m_4}{m_1 + m_2 + m_3})$:

$$x = \frac{x'' + \frac{m_4}{m_1+m_2+m_3}x_4}{1 + \frac{m_4}{m_1+m_2+m_3}} = \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + x_3m_3 + x_4m_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4},$$

$$y = \frac{y_1m_1 + y_2m_2 + y_3m_3 + y_4m_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4},$$

$$z = \frac{z_1m_1 + z_2m_2 + z_3m_3 + z_4m_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}.$$ ●

**5.1.8.** Показать, что треугольник с вершинами в точках $A(8;0;6)$, $B(2;-4;2)$, $C(6;-6;-2)$ прямоугольный.

**5.1.9.** Найти координаты центра тяжести треугольника с вершинами в точках $A(2;5;0)$, $B(11;3;8)$, $C(5;1;12)$.

**5.1.10.** Центр тяжести однородного стержня находится в точке $M(1;-1;5)$, один из его концов есть $A(-2;-1;7)$. Найти координаты другого конца стержня.

## Дополнительные задачи

**5.1.11.** Найти координаты точки на оси $Oz$, удаленной от точки $M(-2;-1;4)$ на 3 единицы.

**5.1.12.** Даны вершины треугольника $A(1;-1;3)$, $B(-5;2;-6)$, $C(2;1;-2)$. Найти длину биссектрисы его внутреннего угла при вершине $A$.

**5.1.13.** Лежат ли на одной прямой точки $A(2;-3;1)$, $B(0;-11;3)$ и $C(4;5;-1)$?

**5.1.14.** В каких октантах могут быть расположены точки, координаты которых удовлетворяют одному из следующих условий:

**1)** $x - y = 0$;

**2)** $x + z = 0$;

**3)** $xy > 0$;

**4)** $xyz < 0$?

**5.1.15.** Найти центр и радиус сферы, которая проходит через точку $A(4;-1;-1)$ и касается всех трех координатных плоскостей.

**5.1.16.** Найти расстояние от точки $A(3;-4;5)$ до начала координат и до осей координат.

**5.1.17.** Даны две вершины параллелограмма $ABCD$: $A(1;1;-1)$, $B(-2;3;0)$ и точка пересечения его диагоналей $M(4;0;3)$. Найти координаты вершин $C$ и $D$.

## Контрольные вопросы и более сложные задачи

**5.1.18.** Найти радиус сферы, проходящей через точки $(0;0;0)$, $(2;0;0)$, $(0;3;0)$, $(0;0;6)$.

**5.1.19.** Проверить, что три данные точки $A(1;-5;3)$, $B(5;-1;7)$ и $C(6;0;8)$ лежат на одной прямой.

**5.1.20.** Доказать, что прямые, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.

**5.1.21.** Где расположены точки $A(0;0;z)$, $B(x;0;z)$, $C(0;y;z)$?

**5.1.22.** Чему равно расстояние от точки $A(-12;-3;4)$ до оси $Ox$?

**5.1.23.** Ребро куба равно 1. Найти длину отрезка, соединяющего середины двух скрещивающихся ребер.

**5.1.24.** Длина радиус-вектора точки $M$ равна 1. Может ли абсцисса точки $M$ равняться 1? 2?

**5.1.25.** Как расположена точка в прямоугольной системе координат, если одна ее координата равна нулю? две ее координаты равны нулю?

## Уравнение поверхности и кривой в пространстве

⇛ *Уравнением поверхности в пространстве* $Oxyz$ называется уравнение $F(x;y;z) = 0$, которому удовлетворяют координаты каждой точки поверхности и только они.

Поверхность *может быть задана* уравнением

$$F(x;y;z) = 0, \tag{1.4}$$

или, например, уравнением $z = f(x;y)$ $\big(y = \varphi(x;z),\ x = \psi(y;z)\big)$.

Уравнение вида

$$F(x;y) = 0 \tag{1.5}$$

определяет в пространстве *цилиндрическую поверхность* с образующими параллельными оси $Oz$ и направляющей, лежащей в плоскости $Oxy$ и заданной в ней уравнением $F(x;y) = 0$. Уравнение поверхности составляется по схеме составления уравнения линии на плоскости.

*Кривую* (*линию*) *в пространстве* можно рассматривать как линию пересечения двух поверхностей; тогда она задается системой двух уравнений

$$\begin{cases} F_1(x;y;z) = 0, \\ F_2(x;y;z) = 0 \end{cases} \tag{1.6}$$

Если кривую рассматривать как траекторию движения точки, то она задается *параметрическими уравнениями*

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in [a;b]. \tag{1.7}$$

**5.1.26.** Найти уравнение сферы радиуса $R$ с центром в точке $O_1(a;b;c)$.

◐ В прямоугольной системе координат $Oxyz$ точка $O_1$ — центр сферы — имеет координаты $a$, $b$ и $c$. Пусть $M(x;y;z)$ — произвольная точка сферы. Тогда $O_1M = R$, или (см. (1.1))

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = R\,.$$

Окончательно получаем уравнение сферы

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2\,.$$ ●

**5.1.27.** Найти координаты центра и радиус сферической поверхности, заданной уравнением $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6z - 6 = 0$.

**5.1.28.** Как расположены точки $A(0;5;7)$, $B(-3;4;0)$, $C(0;0;6)$ относительно сферы $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z - 11 = 0$?

**5.1.29.** Какую поверхность определяет уравнение $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 28 = 0$?

◐ Уравнение имеет вид (1.5), определяет цилиндрическую повехность с образующими, параллельными оси $Oz$; направляющей служит кривая $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 28 = 0$, лежащая в плоскости $Oxy$. Выделим в левой части этого уравнения полные квадраты:

$$(x^2+4x+4)-4+(y^2-10y+25)-25+28=0, \quad (x+2)^2+(y-5)^2=1.$$

Направляющей служит окружность радиуса 1 с центром в точке $(-2;5)$ (рис. 49). Таким образом, заданное уравнение определяет прямой круговой цилиндр. ●

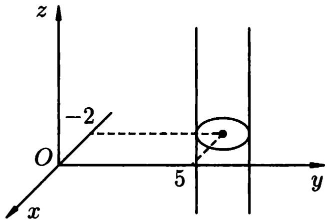


Рис. 49

**5.1.30.** Какие геометрические образы определяются следующими уравнениями:

**1)** $y^2=4$;
**2)** $y^2=x$;
**3)** $x^2+y^2+z^2=0$;
**4)** $z^2+yz=0$?

**5.1.31.** Определить, какие геометрические образы заданы уравнениями:

**1)** $xyz=0$;
**2)** $y^2-x^2=0$;
**3)** $x^2+y^2+4=0$;
**4)** $x^2+y^2-2x-3=0$.

**5.1.32.** Составить уравнение винтовой линии радиуса $a$ и шага $h$.

◐ Винтовую линию описывает точка, которая равномерно вращается вокруг неподвижной оси (на рис. 50 вокруг оси $Oz$) и равномерно перемещается в ее направлении. Пусть $M(x;y;z)$ — произвольная точка линии, а $M_0(x;y;0)$ — ее проекция на плоскость $Oxy$. Точка $M$ лежит на образующей прямого кругового цилиндра, направляющей которого служит окружность радиуса $a$, описываемая точкой $M_0$. Обозначим угол поворота $M_0Ox$ через $t$, т. е. $t=\angle M_0Ox$. В силу равномерности движения точки $M$ можно записать $|MM_0|=bt$. Имеем: $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=|MM_0|=bt$. Для нахождения коэффициента $b$ положим в последнем равенстве $t=2\pi$, $z=h$ (в этом случае точка $M_0$ совершит полный оборот; точка $M$ опишет один виток, поднявшись на шаг $h$ винта). Следовательно, $h=2\pi b$, $b=\frac{h}{2\pi}$.

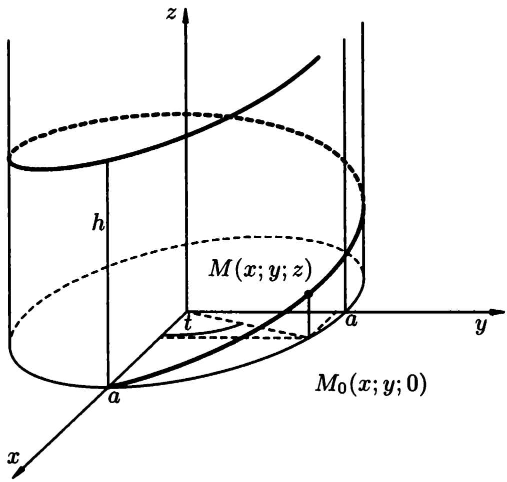


Рис. 50

Уравнениями винтовой линии будут

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \\ z = \dfrac{h}{2\pi}\,t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

●

**5.1.33.** Найти уравнение поверхности, каждая точка которой вдвое ближе к точке $A(2;3;0)$, чем к точке $B(-2;0;0)$.

## Дополнительные задачи

**5.1.34.** Какая кривая определяется уравнениями

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 6x = 0, \\ y - 2 = 0? \end{cases}$$

**5.1.35.** Какие кривые определяются уравнениями:

**1)** $\begin{cases} x = 0, \\ y = 0; \end{cases}$

**2)** $\begin{cases} y - 3 = 0, \\ z + 2 = 0; \end{cases}$

**3)** $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 36, \\ x = 4? \end{cases}$