**5.1.36.** Найти уравнение сферической поверхности с центром в точке $C(2;1;-4)$, проходящей через точку $A(5;3;2)$.

**5.1.37.** Найти уравнение линии пересечения плоскости $Oxz$ и сферы с центром в точке $O(2;2;2)$ и радиусом, равным 3.

**5.1.38.** Найти геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек $A(1;0;0)$ и $B(0;1;0)$.

### Контрольные вопросы и более сложные задачи

**5.1.39.** Из точки $M(2;6;-5)$ проведены всевозможные лучи до пересечения с плоскостью $Oxz$. Составить уравнение геометрического места середин отрезков лучей от точки $M$ до точки пересечения с плоскостью $Oxz$.

**5.1.40.** Найти геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки и данной плоскости.

*Указание.* Поместить начало координат в середине перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость.

**5.1.41.** Вывести уравнение поверхности, сумма квадратов расстояний от каждой точки которой до точек $F_1(-a;0;0)$ и $F_2(a;0;0)$ равна постоянному числу $4a^2$.

**5.1.42.** Вывести уравнение поверхности, модуль разности расстояний от каждой точки которой до точек $F_1(0;-5;0)$ и $F_2(0;5;0)$ равен 6.

**5.1.43.** Какую линию определяет система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = c? \end{cases}$$

**5.1.44.** Какую поверхность определяет уравнение $x^2 + y^2 - 2y = 0$?

**5.1.45.** Лежат ли точки $A_1(0;-4;8)$, $A_2(-1;2;2)$ на поверхности $z = x^2 + \dfrac{y^2}{2}$?

# § 2. ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

## Различные виды уравнения плоскости

Каждая *плоскость* в пространстве $Oxyz$ определяется линейным алгебраическим *уравнением первой степени с тремя неизвестными*. И наоборот: каждое линейное уравнение первого порядка с тремя неизвестными определяет некоторую плоскость в пространстве.

1. ***Уравнение плоскости, проходящей через точку*** $M_0(x_0;y_0;z_0)$ ***перпендикулярно вектору*** $\bar{n} = (A;B;C)$:

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0. \tag{2.1}$$

Уравнение (2.1) называют также *уравнением пучка (связки) плоскостей.* Уравнение пучка плоскостей, проходящих через прямую, образованную пересечением плоскостей $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ имеет вид

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \qquad (2.2)$$

где $\lambda$ — числовой множитель.

2. *Общее уравнение плоскости*:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0). \qquad (2.3)$$

Всякий ненулевой вектор, перпендикулярный данной плоскости, называется ***нормальным вектором*** этой плоскости. В частности, вектор $\bar{n}=(A; B; C)$ — нормальный вектор плоскости, заданной уравнением (2.3)

Частные случаи уравнения (2.3):

$Ax + By + Cz = 0$ $(D = 0)$ — плоскость проходит через начало координат;

$Ax + By + D = 0$ $(C = 0)$ — плоскость параллельна оси $Oz$ (аналогичный смысл имеют уравнения $Ax + Cz + D = 0$, $By + Cz + D = 0$);

$Ax + By = 0$ $(D = C = 0)$ — плоскость проходит через ось $Oz$ ($Ax+Cz+D = 0$, $By+Cz+D = 0$ — через ось $Oy$ и $Ox$ соответственно);

$Ax + D = 0$ $(B = C = 0)$ — плоскость параллельна плоскости $Oyz$ ($Cz + D = 0$, $By + D = 0$ — параллельно плоскости $Oxy$ и $Oxz$ соответственно);

$Ax = 0$, т.е. $x = 0$ $(B = C = D = 0)$ — плоскость совпадает с плоскостью $Oyz$ ($y = 0$, $z = 0$ — уравнения плоскостей $Oxz$ и $Oxy$ соответственно).

3. *Уравнение плоскости в отрезках*:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \qquad (2.4)$$

где $a$, $b$, $c$ — абсцисса, оридината и аппликата точек пересечения плоскостью координатных осей $Ox$, $Oy$ и $Oz$ соответственно.

4. *Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ и $M_3(x_3; y_3; z_3)$*:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.5)$$

Уравнение (2.5) ***в векторной форме*** имеет вид

$$(\bar{r} - \bar{r}_1) \cdot (\bar{r}_2 - \bar{r}_1) \cdot (\bar{r}_3 - \bar{r}_1) = 0, \qquad (2.6)$$

где $\bar{r}$, $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$, $\bar{r}_3$ — радиус-векторы точек $M(x; y; z)$, $M_1$, $M_2$ и $M_3$ соответственно.

5. *Нормальное уравнение плоскости*:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0, \tag{2.7}$$

где $p$ — длина перпендикуляра $OK$, опущенного из начала координат на плоскость; $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ — углы, образованные единичным вектором $\bar{e}$, имеющего направление перпендикуляра $OK$ (рис. 51), с осями $Ox$, $Oy$ и $Oz$ ($\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$).

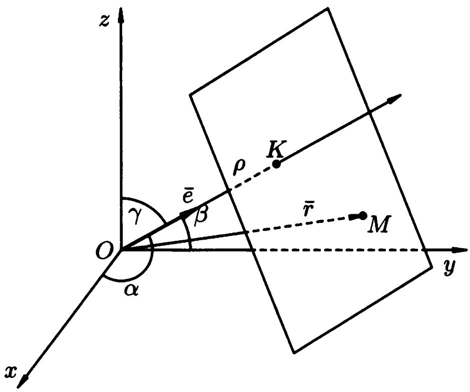


Рис. 51

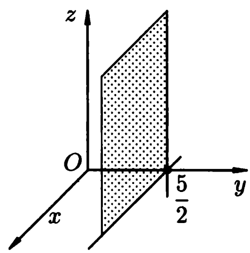


Рис. 52

Уравнение (2.7) *в векторной форме* имеет вид

$$\bar{r}\cdot\bar{e} - p = 0. \tag{2.8}$$

Общее уравнение плоскости (2.3) приводится к нормальному виду (2.7) путем умножения на *нормирующий множитель*

$$\lambda = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \tag{2.9}$$

знак перед дробью берется противоположным знаку свободного члена $D$ (в общем уравнении плоскости).

**5.2.1.** Построить плоскости, заданные уравнениями:
**1)** $2y - 5 = 0$;
**2)** $x + z - 1 = 0$; 3) $3x + 4y + 6z - 12 = 0$.

◐ 1) Плоскость $2y - 5 = 0$ параллельна плоскости $Oxz$ (см. (2.3), частные случаи); она отсекает на оси $Oy$ отрезок, равный $\frac{5}{2}$ и имеет вид, изображенный на рисунке 52.

2) Плоскость $x + z - 1 = 0$ параллельна оси $Oy$ (см (2.3)); она пересекает плоскость $Oxz$ по прямой $x + z = 1$, отсекая на осях $Ox$ и $Oz$ отрезки, равные 1 (рис. 53).

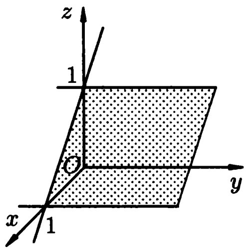


Рис. 53

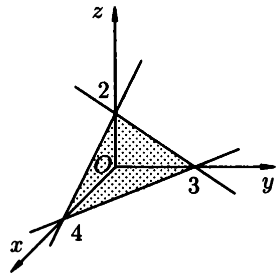


Рис. 54

3) Общее уравнение плоскости $3x + 4y + 6z - 12 = 0$ перепишем в виде (2.4): $3x + 4y + 6z = 12$, т.е. $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$. Эта плоскость отсекает на осях $Ox$, $Oy$, $Oz$ отрезки, равные 4, 3, 2 соответственно (рис. 54). ●

**5.2.2.** Составить уравнение плоскости, проходящей через:

**1)** точку $M(-2;3;1)$ параллельно плоскости $Oxy$;

**2)** точку $M$ и ось $Oy$.

Построить эти плоскости.

**5.2.3.** Составить уравнение плоскости, проходящей через:

**1)** точку $A(5;-4;6)$ перпендикулярно оси $Ox$;

**2)** точку $A$ и отсекающей равные отрезки на положительных координатных полуосях.

Построить эти плоскости.

**5.2.4.** Уравнение плоскости $2x - 6y + 3z - 14 = 0$ привести к нормальному виду.

❍ Умножим обе части уравнения на нормирующий множитель (2.9):

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2^2 + (-6)^2 + 3^2}}, \quad \text{т.е.} \quad \lambda = \frac{1}{7}.$$

Перед корнем взят знак «плюс», т.к. свободный член $C = -14$ заданного уравнения отрицателен. Имеем:

$$\frac{1}{7}(2x - 6y + 3z - 14) = 0 \cdot \frac{1}{7}, \quad \text{т.е.} \quad \frac{2}{7}x - \frac{6}{7}y + \frac{3}{7}z - 2 = 0.$$

Здесь $p = 2$, т.е. расстояние от точки $O(0;0;0)$ до плоскости равно 2;

$$\cos\alpha = \frac{2}{7}, \quad \cos\beta = -\frac{6}{7}, \quad \cos\gamma = \frac{3}{7}$$

$$\left(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{4}{49} + \frac{36}{49} + \frac{9}{49} = 1\right).$$ ●

**5.2.5.** Определить направляющие косинусы радиус-вектора, перпендикулярного к плоскости $3x - 4y + 5z - 10 = 0$.

**5.2.6.** Написать уравнение плоскости:

**1)** параллелльной оси $Oz$ и проходящей через точки $M_1(3;-1;2)$ и $M_2(-1;2;5)$;

**2)** проходящей через точку $M_1$ перпендикулярно вектору $\overline{M_1M_2}$.

○ 1) Уравнение плоскости, параллелльной оси $Oz$, имеет вид $Ax+By+D=0$ (см (2.3), частные случаи). Так как плоскость проходит через точки $M_1$ и $M_2$, то координаты этих точек удовлетворяют уравнению плоскости. Подставим их в уравнение $Ax+By+D=0$. Получаем два уравнения

$$\begin{cases} 3A - B + D = 0, \\ -A + 2B + D = 0 \end{cases}$$

с тремя неизвестными $A$, $B$, $D$. Выразим неизвестные коэффициенты $A$ и $B$ через $D$: умножив первое уравнение на 2 и сложив почленно уравнения, находим $5A+3D=0$, т. е. $A=-\frac{3}{5}D$; тогда $B = 3\cdot\left(-\frac{3}{5}D\right)+D$, т. е. $B=-\frac{4}{5}D$. Подставляя найденные значения $A$ и $B$ в уравнение $Ax+By+D=0$, получаем $-\frac{3}{5}Dx+\left(-\frac{4}{5}D\right)y+D=0$. После сокращения на $\left(-\frac{1}{5}D\right)$ уравнение искомой плоскости приобретает вид $3x+4y-5=0$.

2) Используем уравнение (2.3) плоскости. Вектор $\overline{M_1M_2}$ имеет координаты $\overline{M_1M_2} = (-1-3; 2-(-1); 5-2)$ или $\overline{M_1M_2} = (-4;3;3)$. Так как искомая плоскость перпендикулярна вектору $\overline{M_1M_2}$, он является ее нормалью и, следовательно, значения параметров $A$, $B$, и $C$ в (2.3) равны $-4$, 3 и 3 соответственно. Уравнение плоскости, таким образом, имеет вид

$$-4x+3y+3z+D=0.$$

Точка $M_1(3;-1;2)$ по условию задачи лежит в плоскости. Следовательно, подстановкой координат точки $M_1$ в уравнение плоскости получим тождество:

$$-4\cdot 3 + 3\cdot(-1) + 3\cdot 2 + D = 0.$$

Отсюда находим, что $D=9$. Уравнение искомой плоскости:

$$-4x+3y+3z+9=0.$$ ●

**5.2.7.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2;3;-4)$ и параллельной векторам $\bar{a}=(-3;2;-1)$ и $\bar{b}=(0;3;1)$.

○ Воспользуемся уравнением (2.1) плоскости. Имеем

$$A(x-2)+B(y-3)+C(z+4)=0.$$

Найдем $A$, $B$ и $C$. Так как плоскость параллельна векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$, то в качестве ее нормального вектора $\bar{n} = (A; B; C)$ можно взять вектор $\bar{n} \doteq \bar{a} \times \bar{b}$. Находим вектор $\bar{n}$ по формуле $\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$:

$$\bar{n} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2\bar{i} - 9\bar{k} + 3\bar{i} + 3\bar{j} = 5\bar{i} + 3\bar{j} - 9\bar{k};$$

значит, $A = 5$, $B = 3$, $C = -9$. Искомое уравнение плоскости есть $5(x-2) + 3(y-3) - 9(z+4) = 0$, т. е. $5x + 3y - 9z - 55 = 0$.

*Замечание.* Приведем второе решение задачи. Пусть $M(x; y; z)$ — произвольная точка искомой плоскости. Составим вектор $\overline{M_0M} = (x-2; y-3; z+4)$. Так как векторы $\overline{M_0M}$, $\bar{a}$ и $\bar{b}$ компланарны, то их смешанное произведение равно нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z+4 \\ -3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получаем $5x + 3y - 9z - 55 = 0$. ●

**5.2.8.** Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2; 0; -1)$, $M_2(-3; 1; 3)$ параллельно вектору $\bar{s} = (1; 2; -1)$.

**5.2.9.** Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1; -1; 0)$, параллельно векторам $\bar{a} = (0; 2; 3)$ и $\bar{b} = (-1; 4; 2)$.

**5.2.10.** Написать уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(1; 0; -1)$, $M_2(2; 2; 3)$, $M_3(0; -3; 1)$.

◐ Три точки, не лежащие на одной прямой, определяют в пространстве единственную плоскость. Ее уравнение будем искать в виде (2.3). Так как точки $M_1$, $M_2$ и $M_3$ лежат в одной плоскости, векторы $\overline{M_1M_2}$ и $\overline{M_1M_3}$ также лежат в ней (см. рис. 55)

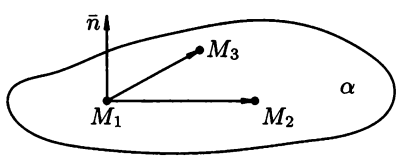


Рис. 55

Векторное произведение векторов $\overline{M_1M_2}$ и $\overline{M_1M_3}$ перпендикулярно плоскости $\alpha$, в которой они лежат. Следовательно, в качестве нормали $\bar{n}$ к плоскости $\alpha$ можно взять вектор

$\bar{n} = \overline{M_1M_2} \times \overline{M_1M_3}$. Находим координаты векторов $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$ и $\bar{n}$:

$$\overline{M_1M_2} = (2-1; 2-0; 3-(-1)) = (1; 2; 4);$$

$$\overline{M_1M_3} = (0-1; -3-0; 1-(-1)) = (-1; -3; 2);$$

$$\bar{n} = \overline{M_1M_2} \times \overline{M_1M_3} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$\bar{i}(4-(-3)\cdot 4) - \bar{j}(1\cdot 2-(-1)\cdot 4) + \bar{k}(1\cdot(-3)-2\cdot(-1)) =$$

$$16\bar{i} - 6\bar{j} - \bar{k}; \quad \bar{n} = (16; -6; -1).$$

Таким образом, параметры $A$, $B$ и $C$ плоскости, заданной уравнением (2.3) равны 16, $-6$ и $-1$ соответственно. Уравнение искомой плоскости, следовательно, имеет вид

$$16x - 6y - z + D = 0.$$

Точка $M_1(1; 0; -1)$ по условию лежит в плоскости. Следовательно, подстановка координат точки $M_1$ в уравнение плоскости обратит его в тождество. Имеем:

$$16 \cdot 1 - 6 \cdot 0 - (-1) + D = 0.$$

Откуда находим, что $D = -17$. Уравнение плоскости, проходящей через заданные точки $M_1$, $M_2$ и $M_3$, имеет вид $16x-6y-z-17=0$.

*Замечание.* Приведенное решение задачи по сути является обоснованием формулы (2.5). ●

**5.2.11.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(-2; 0; 0)$, $M_2(0; 4; 0)$, $M_3(0; 0; 5)$.

**5.2.12.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1; -2; 3)$ и линию пересечения плоскостей $2x - y + 2z - 6 = 0$ и $3x + 2y - z + 3 = 0$.

◔ Линия пересечения плоскостей — прямая. Выберем на ней две произвольные (несовпадающие) точки и сведем задачу к предыдущей — определение уравнения плоскости, проходящей через три заданные точки.

Координаты точек прямой, заданной пересечением плоскости $2x - y + 2z - 6 = 0$ и $3x + 2y - z + 3 = 0$, — это решения системы

$$\begin{cases} 2x - y + 2z - 6 = 0, \\ 3x + 2y - z + 3 = 0. \end{cases}$$

Выбрать два решения этой системы можно различными способами. Поступим так: присвоим одной из переменных фиксированное значение (что-нибудь простое, например, равное нулю или единице), а значения остальных переменных найдем из образующейся системы. Пусть, например, $x = 0$. Тогда система уравнений примет вид

$$\begin{cases} -y + 2z = 6, \\ 2y - z = -3, \end{cases}$$

решение которой $y = 0$, $z = 3$. Итак, одна точка найдена. Обозначим ее $M_2$. Координаты этой точки $M_2(0; 0; 3)$.

Для нахождения второй точки поступим аналогичным образом. Пусть теперь $x = 3$ (подставка $z = 0$ приводит к дробным решениям, что слегка усложняет арифметические процедуры). Исходная система уравнений примет вид

$$\begin{cases} 6 - y + 2z - 6 = 0, \\ 9 + 2y - z + 3 = 0, \end{cases}$$

решение которой $y = -8$; $z = -4$. Найдена вторая точка на прямой (обозначим ее $M_3$), координаты которой $M_3(3; -8; -4)$. Теперь есть три точки $M_1(1; -2; 3)$, $M_2(0; 0; 3)$ и $M_3(3; -8; -4)$, определяющие в пространстве плоскость. Ее уравнение находится способом, показанным в решении задачи 5.2.7. Уравнение искомой плоскости: $14x + 7y - 2z + 6 = 0$. ●

**5.2.13.** Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1; 1; 1)$ перпендикулярно к линии пересечения двух плоскостей $x - y + 2z - 3 = 0$ и $2x - z + 4 = 0$.

**5.2.14.** Найти уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения двух плоскостей $x - 2y + 3z - 4 = 0$ и $x + y - 5z + 9 = 0$ и параллельной оси $Ox$.

## Дополнительные задачи

**5.2.15.** Найти объем пирамиды, ограниченной плоскостью $x + 3y - 5z - 15 = 0$ и координатными плоскостями.

**5.2.16.** Найти длину перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость $20x - 5y + 4z - 210 = 0$ и угол, образованный этим перпендикуляром с осью $Oz$.

**5.2.17.** Найти плоскость, зная, что точка $M(2; -4; 4)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту плоскость.

**5.2.18.** Найти геометрическое место точек, равноудаленных от точек $M_1(2; 1; -2)$ и $M_2(-2; 3; 4)$.

**5.2.19.** Найти уравнение плоскости, отсекающей на отрицательной полуоси $Oy$ отрезок, равный 4, и перпендикулярной вектору $\bar{n} = (3; -2; 4)$.

**5.2.20.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(4;2;3)$ и $M_2(2;0;1)$ и перпендикулярной к плоскости $x + 2y + 3z + 4 = 0$.

**5.2.21.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;0;3)$ и перпендикулярной к плоскостям $x + y + z - 8 = 0$ и $2x - y + 4z + 5 = 0$.

**5.2.22.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1;2;3)$ и $M_2(-2;-3;4)$ и пересекающей оси $Ox$ и $Oz$ в точках с равными и положительными координатами.

**5.2.23.** Найти расстояние от начала координат до плоскости, которая пересекает оси $Ox$, $Oy$, $Oz$ в точках с координатами $a = -6$, $b = 3$, $c = 3$.

**5.2.24.** Найти уравнение плоскости, проходящей через основания перпендикуляров, опущенных из точки $M(2;2;2)$ на координатные плоскости.

**5.2.25.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;-2;5)$ и отсекающей на осях $Ox$ и $Oy$ втрое большие отрезки, чем на оси $Oz$.

**5.2.26.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1$ перпендикулярно вектору $\overline{M_1M_2} = \bar{i} - \bar{j} - 3\bar{k}$, зная точку $M_2(2;-8;-1)$.

**5.2.27.** Найти точку пересечения следующих плоскостей:

1) $x - 3y + 2z - 11 = 0$, $x - 2y + z - 7 = 0$, $2x + y - z + 2 = 0$;

2) $3x + y + z - 5 = 0$, $x - 4y - 2z + 3 = 0$, $3x - 12y - 6z + 7 = 0$.

## Контрольные вопросы и более сложные задачи

**5.2.28.** Доказать, что уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ параллельно двум векторам $\bar{a} = (m_1;n_1;p_1)$ и $\bar{b} = (m_2;n_2;p_2)$, может быть представленным в виде

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0.$$

**5.2.29.** Составить уравнение плоскости, проведенной через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ параллельно вектору $\bar{a} = (a_x;a_y;a_z)$ и перпендикулярно плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

**5.2.30.** Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат, точку $M_0(-1;2;1)$ и точку пересечения плоскостей $2x - 4y + 5z = 21$, $x - 3z + 18 = 0$, $6x + y + z - 30 = 0$.

**5.2.31.** Плоскости $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ и $3x + y - 2z - 18 = 0$ образуют треугольную пирамиду. Найти объем куба, вписанного в пирамиду так, что три его грани лежат на координатных плоскостях, одна из его вершин — на последней плоскости ($3x + y - 2z - 18 = 0$).

**5.2.32.** Найти точку, симметричную началу координат относительно плоскости $10x + 2y - 11z + 450 = 0$.

**5.2.33.** Чему равна площадь треугольника, отсеченного плоскостью $2x - 9y + 6z - 12 = 0$ от координатного угла $Oxz$?

**5.2.34.** Каково уравнение плоскости, проходящей через точку $(1;2;3)$ перпендикулярно вектору $\bar{a} = (3;2;1)$?

**5.2.35.** Какое из следующих уравнений плоскости является нормальным 1) $\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}z - 6 = 0$; 2) $x + y - 2 = 0$; 3) $y + 1 = 0$; 4) $x - 1 = 0$; 5) $\frac{3}{7}x + \frac{6}{7}y - \frac{2}{7}z + 2 = 0$?

**5.2.36.** Проходит ли плоскость $2x - 4y + z - 3 = 0$ через одну из следующих точек: $A(2;1;3)$, $B(0;2;10)$, $C(-3;-3;-3)$?

**5.2.37.** Найти точки пересечения плоскости $x + 2y - 3z + 6 = 0$ с осями координат.

## Угол между двумя плоскостями, условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей; расстояние от данной точки до данной плоскости

Углом между плоскостями в пространстве называется угол между нормальными векторами этих плоскостей. Если две плоскости $Q_1$ и $Q_2$ заданы уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, то величина угла $\varphi$ между ними вычисляется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \tag{2.10}$$

Величина *наименьшего* из двух смежных углов, образованных этими плоскостями, находится по формуле:

$$\cos\varphi = \left| \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \right|. \tag{2.11}$$

*Условие параллельности двух плоскостей* $Q_1$ и $Q_2$ имеет вид

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}, \tag{2.12}$$

*условие перпендикулярности*

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0, \tag{2.13}$$

*плоскости совпадают*, когда

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}. \tag{2.14}$$

*Расстояние $d$ от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$* находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{2.15}$$

Если плоскость задана уравнением $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$, то расстояние от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости может быть найдено по формуле

$$d = |x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p|. \tag{2.16}$$

**5.2.38.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1; -3; -2)$ параллельно плоскости $3x - 2y + 4z - 3 = 0$.

○ Ищем уравнение плоскости в виде $Ax + By + Cz + D = 0$ (это вид 2.3). Две параллельные плоскости имеют общую нормаль. Координаты нормали заданной плоскости $\overline{n} = (3; -2; 4)$. Следовательно, уравнение искомой плоскости имеет вид $3x - 2y + 4z + D = 0$.

Точка $M(1; -3; -2)$ по условию лежит в искомой плоскости. Следовательно, подстановкой координат $M$ в уравнение плоскости получим тождество: $3\cdot(1) - 2\cdot(-3) + 4\cdot(-2) + D = 0$. Отсюда находим, что $D = -1$. Уравнение искомой плоскости имеет вид $3x - 2y + 4z - 1 = 0$. ●

**5.2.39.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-4; -3; -2)$, параллельно плоскости $x + 2y - 3z - 6 = 0$.

**5.2.40.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(0; -3; 2)$ параллельно плоскости, проходящей через три точки $M_1(0; -2; -1)$, $M_2(1; -3; 4)$, $M_3(1; 1; -1)$.

**5.2.41.** Найти величину острого угла между плоскостями:

**1)** $11x - 8y - 7z - 15 = 0$ и $4x - 10y + z - 2 = 0$;

**2)** $2x + 3y - 4z + 4 = 0$ и $5x - 2y + z - 3 = 0$.

○ 1) Воспользовавшись формулой (2.11), получаем

$$\cos\varphi = \frac{|11\cdot 4 - 8\cdot(-10) - 7\cdot 1|}{\sqrt{121+64+49}\cdot\sqrt{16+100+1}} =$$

$$= \frac{117}{\sqrt{234}\cdot\sqrt{117}} = \frac{\sqrt{117}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{117}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4}.$$

2) Можно заметить, что выполняется условие (2.13) перпендикулярности плоскостей, т.к. $2\cdot 5 + 3\cdot(-2) - 4\cdot 1 = 0$. Следовательно, плоскости взаимно перпендикулярны; $\varphi = \frac{\pi}{2}$. ●

**5.2.42.** Найти величину острого угла между плоскостями:
1) $x + y - 2z + 5 = 0$ и $2x + 3y + z - 2 = 0$;
2) $2x - 2y + z = 0$ и $z = 0$.

**5.2.43.** Написать уравнение плоскости, параллельной плоскости $x - 2y + 2z + 5 = 0$ и удаленной от точки $M(3; 4; -2)$ на расстояние $d = 5$.

❍ Уравнение искомой плоскости ищем в виде $x - 2y + 2z + D = 0$. Найдем значение $D$. Так как точка $M$ удалена от искомой плоскости на расстояние $d = 5$, то по формуле (2.15) записываем

$$5 = \frac{|3 - 2 \cdot 4 + 2 \cdot (-2) + D|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} \qquad \text{или} \qquad 5 = \frac{|D - 9|}{3},$$

т.е. $15 = \pm(D - 9)$, откуда $D = 24$ и $D = -6$. Условию задачи удовлетворяют две плоскости $x - 2y + 2z + 24 = 0$ и $x - 2y + 2z - 6 = 0$. ●

**5.2.44.** Найти расстояние между параллельными плоскостями:
1) $x + y - z - 2 = 0$ и $2x + 2y - 2z + 5 = 0$;
2) $2x - 3y + 6z - 14 = 0$ и $2x - 3y + 6z + 42 = 0$.

**5.2.45.** Найти расстояние от точки $M_0(5; 4; -1)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(0; 4; 0)$, $M_2(0; 4; -3)$, $M_3(3; 0; 3)$.

**5.2.46.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(-1; 3; 0)$ и $M_2(2; 4; -1)$, перпендикулярно плоскости $x - 2y + 3z - 10 = 0$.

❍ Ищем уравнение плоскости в виде $Ax + By + Cz + D = 0$. Точки $M_1$ и $M_2$ лежат в искомой плоскости, следовательно, вектор $\overline{M_1M_2}$ также лежит в ней. Его координаты: $\overline{M_1M_2} = (2 - (-1); 4 - 3; -1 - 0) = (3; 1; -1)$.

Так как заданная и искомая плоскости перпендикулярны, вектор-нормаль заданной плоскости лежит в искомой. Координаты вектора-нормали заданной плоскости: $\bar{n} = (1; -2; 3)$.

Нормаль $\bar{n}_1$ к искомой плоскости находим как векторное произведение лежащих в ней неколлинеарных векторов:

$$\bar{n}_1 = \overline{M_1M} \times \bar{n} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \bar{i}(3 - 2) - \bar{j}(9 + 1) + \bar{k}(-6 - 1);$$

$\bar{n}_1 = (1; -10; -7)$. Уравнение искомой плоскости имеет вид $x - 10y - 7z + D = 0$. Подставляя координаты точки $M_1 = (-1; 3; 0)$ (или $M_2$), лежащей в плоскости, в это уравнение, находим, что $D = 31$. Уравнение искомой плоскости имеет вид $x - 10y - 7z + 31 = 0$. ●

**5.2.47.** Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и точку $M(2; 1; -1)$ перпендикулярно плоскости $2x - 3z = 0$.

## Дополнительные задачи

**5.2.48.** Установить, какие из следующих пар плоскостей являются параллельными, какие — перпендикулярными:
**1)** $3x + 4y - z + 8 = 0$ и $6x + 8y - 2z - 3 = 0$;
**2)** $3x - 6y + 3z - 12 = 0$ и $-x + 2y - z + 4 = 0$;
**3)** $x + 2y - 5z + 1 = 0$ и $2x + 4y + 2z - 7 = 0$.

**5.2.49.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(4;0;2)$ и перпендикулярной плоскостям $x + y + z = 0$ и $y - z = 0$.

**5.2.50.** Найти координаты точки на оси $Oy$, равноудаленной от двух плоскостей $x + 2y - 2z + 6 = 0$ и $2x + y + 2z - 9 = 0$.

**5.2.51.** Дана пирамида с вершинами $A(2;2-3)$, $B(3;1;1)$, $C(-1;0;-5)$, $D(4;-2;-3)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины $D$ на грань $ABC$.

**5.2.52.** Составить уравнение плоскости, расположенной на расстоянии четырех единиц от плоскости $3x-6y-2z+8 = 0$ и параллельно ей.

**5.2.53.** Доказать, что параллелепипед, грани которого лежат в плоскостях $8x-4y+5z-7 = 0$, $3x+y-4z+13 = 0$, $11x+47y+20z+2 = 0$, является прямоугольным.

**5.2.54.** Найти объем куба, две грани которого лежат на плоскостях $13x + 5y + \sqrt{2}z - 5 = 0$ и $13x + 5y + \sqrt{2}z + 23 = 0$.

**5.2.55.** Даны уравнения трех граней параллелепипеда $x + 4 = 0$, $y+2z-5 = 0$, $x-3y+4z-12 = 0$ и одна из его вершин $(4;-3;2)$. Найти уравнения трех других граней параллелепипеда.

**5.2.56.** Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $2x - y - 12z - 3 = 0$ и $3x + y - 7z - 2 = 0$ перпендикулярно плоскости $4x - 2y + 25 = 0$.

**5.2.57.** Определить уравнение плоскости, проходящей через ось $Oy$ и составляющей с плоскостью $x + \sqrt{6}y - z - 3 = 0$ угол $60°$.

## Контрольные вопросы и более сложные задачи

**5.2.58.** Составить уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы, образованные плоскостями $2x - 2y + z + 5 = 0$ и $x + 2y - 2z - 3 = 0$.

**5.2.59.** Написать уравнение плоскости, расположенной на равном расстоянии от двух данных параллельных плоскостей $4x - 3y + z - 2 = 0$ и $4x - 3y + z + 8 = 0$.

**5.2.60.** Написать уравнение плоскости, проходящей через две точки $M_1(0;0;2)$ и $M_2(0;1;0)$ и образующей угол $45°$ с плоскостью $Oyz$.