5.2.61. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ и начало координат.

5.2.62. Найти уравнение плоскости, параллельной оси Oy и проходящей через точки $M_1(a_1; b_1; c_1)$ и $M_2(a_2; b_2; c_2)$.

5.2.63. При каких значениях α и β уравнения будут определять параллельные плоскости:

1) $2x + \alpha y + 3z - 8 = 0$ и $\beta x - 6y - 6z + 4 = 0$;

2) $\alpha x + 2y - 3z + 11 = 0$ и $3x - 5y - \beta z - 2 = 0$?

5.2.64. Определить, при каких значениях γ следующие пары уравнений будут определять перпендикулярные плоскости:

1) $4x - 7y + 2z - 3 = 0$ и $-3x + 2y + \gamma z + 5 = 0$;

2) $x - \gamma y + z = 0$ и $2x + 3y + \gamma z - 1{,}2 = 0$.

5.2.65. Пересекаются ли плоскости $2x - y + z - 140 = 0$, $x - z = 0$, $x + 5y - 2z + 1 = 0$?

§ 3. ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Различные виды уравнения прямой в пространстве

1. *Канонические уравнения прямой*, проходящей через данную точку (x_0, y_0, z_0) параллельно вектору $\bar{a} = (m, n, p)$, имеют вид

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}; \tag{3.1}$$

Всякий ненулевой вектор, параллельный данной прямой, называется *направляющим вектором этой прямой*. В частности, вектор $\bar{a} = (m, n, p)$ — направляющий для прямой, заданной уравнениями (3.1). Обращение в нуль одного из знаменателей уравнения (3.1) означает обращение в нуль соответствующего числителя.

2. *Параметрические уравнения прямой*:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \end{cases} \tag{3.2}$$

где t — переменный параметр, $t \in \mathbb{R}$. В *векторной форме* уравнение (3.2) имеет вид

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{s}t, \tag{3.3}$$

где $\bar{r}_0 = (x_0; y_0; z_0)$, $\bar{s} = (m; n; p)$.

3. *Уравнение прямой, проходящей через две точки* $M_1(x_1; y_1; z_1)$ *и* $M_2(x_2; y_2; z_2)$, где $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$, $z_1 \neq z_2$, имеет вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{3.4}$$

4. *Общее уравнение прямой*:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

(коэффициенты при переменных не пропорциональны). Направляющий вектор прямой (3.5) находится по формуле

$$\bar{s} = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2 \qquad \text{или} \qquad \bar{s} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \tag{3.6}$$

т. е.

$$\bar{s} = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; - \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right).$$

5.3.1. Общее уравнение прямой

$$\begin{cases} x + 2y - 3z + 2 = 0, \\ 2x - 2y + z - 5 = 0 \end{cases}$$

преобразовать к каноническому виду и определить величины углов, образованные этой прямой с координатными осями.

◐ Для решения этой задачи надо знать какую-либо точку прямой и ее направляющий вектор $\bar{s}$. Выберем точку на прямой следующим образом: положим, например, $z = 0$; тогда для определения абсциссы x и ординаты y у этой точки получим систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2y + 2 = 0, \\ 2x - 2y - 5 = 0, \end{cases}$$

из которой находим $x = 1$, $y = -\frac{3}{2}$. Итак, на прямой известна точка $\left(1; -\frac{3}{2}; 0\right)$. Направляющий вектор прямой находим по формуле (3.6):

$$\bar{s} = \left(\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}; - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \right) \quad \text{т. е.} \quad \bar{s} = (-4; -7; -6).$$

Тогда, согласно формуле (3.1),

$$\frac{x-1}{-4} = \frac{y + \frac{3}{2}}{-7} = \frac{z-0}{-6} \quad \text{или} \quad \frac{x-1}{4} = \frac{y + \frac{3}{2}}{7} = \frac{z}{6}$$

— искомое уравнение прямой.

Замечание. Каноническое уравнение прямой можно получить, зная две точки этой прямой. В качестве координат этих точек можно взять два любых решения данной системы уравнений. Например, $\left(\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}; 1\right)$ и $\left(0; -\frac{13}{4}; -\frac{3}{2}\right)$. Тогда искомое уравнение найдем, используя формулы (3.4):

$$\frac{x-\frac{5}{3}}{0-\frac{5}{3}} = \frac{y+\frac{1}{3}}{-\frac{13}{4}+\frac{1}{3}} = \frac{z-1}{-\frac{3}{2}-1},$$

т. е.

$$\frac{x-\frac{5}{3}}{-\frac{5}{3}} = \frac{y+\frac{1}{3}}{-\frac{35}{12}} = \frac{z-1}{-\frac{5}{2}}, \quad \text{или} \frac{x-\frac{5}{3}}{4} = \frac{y+\frac{1}{3}}{7} = \frac{z-1}{6}.$$

Направление прямой задает вектор $\bar{s} = (4; 7; 6)$. Он образует с координатными осями Ox, Oy, Oz углы α, β и γ — соответственно. Находим эти углы по известным формулам

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\bar{a}|}.$$

Получаем

$$\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{4^2+7^2+6^2}}, \quad \cos\beta = \frac{7}{\sqrt{4^2+7^2+6^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{6}{\sqrt{4^2+7^2+6^2}}$$

$$\text{или} \quad \cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{101}}, \quad \cos\beta = \frac{7}{\sqrt{101}}, \quad \cos\gamma = \frac{6}{\sqrt{101}}.$$

Заметим, для контроля, что равенство $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ выполняется. ●

5.3.2. Найти направляющий вектор прямой

$$\begin{cases} x = 2, \\ z = 4. \end{cases}$$

5.3.3. Привести к каноническому виду прямую

$$\begin{cases} x + 2y + 4z - 8 = 0, \\ 6x + 3y + 2z - 18 = 0. \end{cases}$$

5.3.4. Найти направляющие косинусы прямой $\frac{x+3}{3} = \frac{y-2{,}5}{0} = \frac{z-1}{-4}$.

5.3.5. Составить параметрические уравнения прямых, проведенных через точку $M_0(2; -1; -3)$ в каждом из следующих случаев:

1) прямая параллельна прямой $\begin{cases} x = -1 + 2t, \\ y = 2 - 4t, \\ z = t; \end{cases}$

2) прямая параллельна оси Oy;

3) прямая перпендикулярна плоскости $3x + y - z - 8 = 0$.

○ 1) Так как прямые параллельны, то они имеют один и тот же направляющий вектор $\bar{s} = (2; -4; 1)$. Согласно формулам (3.2) имеем искомое уравнение прямой

$$\begin{cases} x = 2 + 2t, \\ y = -1 - 4t, \\ z = -3 + t. \end{cases}$$

2) В качестве направляющего вектора оси Oy можно взять вектор $\bar{s} = (0; 1; 0)$, совпадающий с ортом $\bar{j}$. Искомое уравнение прямой есть

$$x = 2 + 0 \cdot t\,, \qquad y = -1 + 1 \cdot t\,, \qquad z = -3 + 0 \cdot t\,,$$

$$\text{т. е.} \quad \begin{cases} x = 2, \\ y = -1 + t, \\ z = -3. \end{cases}$$

3) Вектор $\bar{n} = (3; 1; -1)$ перпендикулярен плоскости $3x + y - z - 8 = 0$. Следовательно, в качестве вектора $\bar{s}$ можно взять вектор $\bar{n}$, т. е. $\bar{s} = (3; 1; -1)$. Тогда параметрические уравнения прямой, перпендикулярной плоскости $3x + y - z - 8 = 0$, примут вид

$$\begin{cases} x = 2 + 3t, \\ y = -1 + t, \\ z = -3 - t. \end{cases}$$

●

5.3.6. Найти параметрические уравнения прямой:

1) проходящей через точку $(1; 0; -1)$ и параллельной вектору $\bar{a} = (2; 3; 0)$;

2) проходящей через точки $(2; 2; 2)$ и $(6; 2; 1)$.

5.3.7. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(4; 3; -2)$ параллельно

1) вектору $\bar{a} = (3; -6; 5)$;

2) прямой $\begin{cases} x + 3y + z - 6 = 0, \\ 2x - y - 4z + 1 = 0. \end{cases}$

○ 1) В качестве направляющего вектора прямой, проходящей через точку M_0 возьмем вектор $\bar{s}$ равный вектору $\bar{a}$, т. е. $\bar{s} = (3; -6; 5)$. Тогда, по формуле (3.1), канонические уравнения прямой примут вид

$$\frac{x - 4}{3} = \frac{y - 3}{-6} = \frac{z + 2}{5}\,.$$

2) Направляющий вектор $\bar{s}_1$ данной прямой находим по формулам (3.6):

$$\bar{s}_1 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -11\bar{i} + 6\bar{j} - 7\bar{k},$$

т. е. $\bar{s}_1 = (-11; 6; -7)$. Так как данная прямая и искомая параллельны между собой, то в качестве направляющего вектора $\bar{s}$ искомой прямой можно взять вектор $\bar{s}_1$, т. е. $\bar{s} = \bar{s}_1$. Получаем канонические уравнения

$$\frac{x-4}{-11} = \frac{y-3}{6} = \frac{z+2}{-7}.$$

5.3.8. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $(3; -2; 5)$:
1) параллельно оси Oz;
2) параллельно прямой $\begin{cases} x - y + z - 1 = 0, \\ 2x + y - 4z + 3 = 0. \end{cases}$

Дополнительные задачи

5.3.9. Проверить, лежит ли точка $M(1; -3; 2)$ на прямой

$$\begin{cases} 3x - 2y + z - 11 = 0, \\ 2x + 5y + 6z + 1 = 0. \end{cases}$$

5.3.10. Проверить, лежат ли на одной прямой три данные точки $(-3; 5; 4)$, $(2; 4; 6)$, $(2; 14; 6)$.

5.3.11. Привести к каноническому виду уравнение прямой

$$\begin{cases} x - y + 2z + 1 = 0, \\ x + y - z - 1 = 0. \end{cases}$$

5.3.12. Найти точки пересечения прямой $\frac{x-3}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-5}{5}$ с координатными плоскостями.

5.3.13. Найти точки пересечения прямой

$$\begin{cases} x + y + z - 4 = 0, \\ 2x - 3y - 4z + 2 = 0 \end{cases}$$

с координатными плоскостями.

5.3.14. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M(-4; 2; 2)$ и пересекающей ось Oz под прямым углом.

5.3.15. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(1; -1; 2)$ и перпендикулярной векторам $\bar{a} = (2; 2; 3)$ и $\bar{b} = (-2; 5; 0)$.

5.3.16. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(1;3;-2)$ и образующей с осями Ox, Oy, Oz углы 120°, 60°, 45° соответственно.

5.3.17. При каких значениях D прямая

$$\begin{cases} 4x - 6y + 7z + D = 0, \\ 2x + 5y - 3z - 10 = 0 \end{cases}$$

пересекает ось Ox?

5.3.18. Даны вершины треугольника $A(-3;2;8)$, $B(-7;0;3)$, $C(3;4;5)$. Составить параметрические уравнения его медианы, проведенной из вершины A.

5.3.19. Даны две вершины параллелограмма $ABCD$: $A(8;1;5)$ и $D(-3;0;4)$ и точка пересечения диагоналей $O(2;4;-2)$. Найти уравнение стороны BC.

Контрольные вопросы и более сложные задачи

5.3.20. Даны вершины треугольника $A(3;-1;-1)$, $B(1;2;-7)$, $C(-5;14;-3)$. Составить канонические уравнения биссектрисы его внутреннего угла при вершине B.

5.3.21. Найти соотношения, которым должны удовлетворять коэффициенты прямой

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

для того, чтобы прямая:

1) проходила через начало координат;

2) была параллельна оси Oy;

3) пересекала ось Oz;

4) совпадала с осью Ox.

5.3.22. Найти уравнения плоскостей, проектирующих прямую

$$\begin{cases} x - 6y + 2z - 4 = 0, \\ 2x + y - 2z + 6 = 0 \end{cases}$$

на координатные плоскости.

5.3.23. Каково уравнение оси Ox?

5.3.24. Написать параметрические уравнения прямой

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x - y + 2z = 0. \end{cases}$$

Угол между двумя прямыми; условия параллельности и перпендикулярности прямых; условие компланарности двух прямых

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

Под углом между прямыми понимают угол между направляющими векторами $\bar{a}_1=(m_1;n_1;p_1)$ и $\bar{a}_2=(m_2;n_2;p_2)$. Величина угла между прямыми L_1 и L_2 определяется из формулы

$$\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}. \tag{3.7}$$

Для нахождения величины острого угла между прямыми L_1 и L_2 числитель правой части формулы (3.7) следует взять по модулю:

$$\cos\varphi=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}. \tag{3.8}$$

Условие перпендикулярности прямых L_1 и L_2 имеет вид

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0. \tag{3.9}$$

Условие параллельности (или совпадения) прямых —

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}. \tag{3.10}$$

Условием, при котором *две прямые* L_1 *и* L_2 *лежат в одной плоскости*, является равенство

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0, \tag{3.11}$$

при этом, если $\bar{a}_1 \nparallel \bar{a}_2$, то прямые L_1 и L_2 пересекаются.

5.3.25. Найти величину острого угла между прямыми

$$\frac{x-4}{-3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-5}{-2} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x-y+2z-8=0, \\ 2x+y-z+3=0. \end{cases}$$

○ Направляющий вектор первой прямой есть $\bar{s}_1=(-3;1;-2)$. Находим направляющий вектор $\bar{s}_2$ второй прямой:

$$\bar{s}_2=\left(\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix};-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right), \quad \text{т.е.} \quad \bar{s}_2=(-1;5;3).$$

По формуле (3.8) находим

$$\cos\varphi = \frac{|-3\cdot(-1)+1\cdot 5-2\cdot 3|}{\sqrt{9+1+4}\cdot\sqrt{1+25+9}} = \frac{\sqrt{10}}{35},$$

поэтому $\varphi = \arccos\frac{\sqrt{10}}{35}$ ($\approx 85°$). ●

5.3.26. Найти величину острого угла между прямыми:

1) $\frac{x}{11} = \frac{y+1}{8} = \frac{z-1}{7}$ и $\frac{x-4}{7} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{8}$;

2) $\begin{cases} x-y+2=0, \\ 2x+y-z-6=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x+y+z-1=0, \\ x-y+3z+1=0. \end{cases}$

5.3.27. Установить взаимное расположение прямых:

1) $\frac{x-2}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-2}$ и $\begin{cases} x=5-8t, \\ y=4-6t, \\ z=3+4t; \end{cases}$

2) $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+2}{1}$ и $\frac{x+4}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{4}$.

○ 1) Выпишем направляющие векторы первой и второй прямых: $\bar{s}_1 = (4;3;-2)$, $\bar{s}_2 = (-8;-6;4)$. Как видно, координаты этих векторов пропорциональны:

$$\frac{4}{-8} = \frac{3}{-6} = \frac{-2}{4}.$$

Следовательно, данные прямые параллельны или совпадают. Возьмем на первой прямой какую-нибудь точку, например точку $(2;0;-1)$. Подставим ее координаты в уравнение второй прямой:

$$\begin{cases} 2=5-8t, \\ 0=4-6t, \\ -1=3+4t. \end{cases}$$

Получаем $t=\frac{3}{8}$ — из первого уравнения, $t=\frac{2}{3}$ — из второго, $t=-1$ — из третьего. Это означает, что точка $(2;0;-1)$ не принадлежит второй прямой; прямые не совпадают, значит они параллельны.

2) Координаты направляющих векторов $\bar{s}_1 = (2;-3;1)$ и $\bar{s}_2 = (3;2;4)$ данных прямых не пропорциональны. Следовательно, прямые либо пересекающиеся, либо скрещивающиеся. Проверим выполнение условия (3.11) принадлежности двух прямых одной плоскости, предварительно выписав координаты точек M_1 и M_2, через которые проходят данные прямые:

$M_1(0;1;-2)$, $M_2(-4;-3;1)$. Имеем

$$\begin{vmatrix} -4-0 & -3-1 & 1-(-2) \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -4 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -4\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -4\cdot(-14) + 4\cdot 5 + 3\cdot 13 = 115 \neq 0.$$

Следовательно, данные прямые — скрещивающиеся. ●

5.3.28. Выяснить взаимное расположение прямых:

1) $\begin{cases} 2x - 3y - 3z - 9 = 0, \\ x - 2y + z + 3 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 18t, \\ y = 10t, \\ z = -3 + 2t. \end{cases}$

2) $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y+30}{5} = \dfrac{z-2{,}5}{4}$ и $\dfrac{x+1}{6} = \dfrac{y-7}{2} = \dfrac{z+4}{-1}$.

5.3.29. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(-2;3;4)$ и перпендикулярной прямым

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{3}.$$

○ Уравнение искомой прямой имеет вид

$$\frac{x+2}{m} = \frac{y-3}{n} = \frac{z-4}{p}.$$

Найдем m, n и p — координаты направляющего вектора $\bar{s}$ этой прямой. Используя условие (3.9) перпендикулярности прямых, можно записать:

$$\begin{cases} m\cdot 1 + n\cdot(-1) + p\cdot 2 = 0, \\ m\cdot 2 + n\cdot 1 + p\cdot 3 = 0. \end{cases}$$

По правилу решения системы двух линейных однородных уравнений с тремя неизвестными находим:

$$m = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} t = -5t, \quad n = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} t = t, \quad p = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} t = 3t.$$

Уравнения искомой прямой есть

$$\frac{x+2}{-5t} = \frac{y-3}{t} = \frac{z-4}{3t} \quad \text{или} \quad \frac{x+2}{-5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{3}.$$

Замечания: 1) Систему уравнений

$$\begin{cases} m - n + 2p = 0, \\ 2m + n + 3p = 0 \end{cases}$$

можно переписать в виде

$$\begin{cases} \dfrac{m}{p} - \dfrac{n}{p} + 2 = 0, \\ 2\dfrac{m}{p} + \dfrac{n}{p} + 3 = 0. \end{cases}$$

Отсюда $\dfrac{m}{p} = -\dfrac{5}{3}$, $\dfrac{n}{p} = \dfrac{1}{3}$ т.е. $m : n : p = -5 : 1 : 3$, поэтому $m = -5t$, $n = t$, $p = 3t$, где t — число.

2) В качестве вектора $\bar{s}$ можно использовать вектор $\bar{s}_1 \times \bar{s}_2$, т.к. искомая прямая перпендикулярна данным прямым. Тогда

$$\bar{s} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -5\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}, \quad \text{т.е.} \quad m = -5, \quad n = 1, \quad p = 3.$$

●

5.3.30. Составить канонические уравнения прямой, лежащей в плоскости Oxy, проходящей через начало координат и перпендикулярной к прямой $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-4}{3}$.

5.3.31. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(1; -2; 3)$ и перпендикулярной к прямым $\dfrac{x-5}{3} = \dfrac{y-4}{1} = \dfrac{z-3}{-2}$, $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y+4}{-5} = \dfrac{z-1}{4}$.

Дополнительные задачи

5.3.32. Найти расстояние от точки $M(-5; 4; 3)$ до прямой $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z-1}{2}$.

5.3.33. Найти расстояние между параллельными прямыми $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{4} = \dfrac{z}{2}$ и $\dfrac{x-7}{3} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z-3}{2}$.

Указание. Воспользоваться формулой $S_\triangle = \dfrac{1}{2}|\bar{a} \times \bar{b}|$.

5.3.34. Проверить, лежат ли прямые

$$\begin{cases} x - 2y + 8 = 0, \\ y + z - 6 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 3x + 2z - 3 = 0, \\ x - 5y + 9 = 0 \end{cases}$$

в одной плоскости.

5.3.35. В уравнении прямой $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{n} = \dfrac{z}{3}$ найти параметр n, при котором эта прямая пересекается с прямой $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y-4}{2} = \dfrac{z+1}{1}$, найти координаты точки их пересечения.

5.3.36. Показать, что прямая

$$\begin{cases} x = 2t, \\ y = 3t, \\ z = t \end{cases}$$

перпендикулярна к прямой

$$\begin{cases} y + z - 8 = 0, \\ x - z + 4 = 0. \end{cases}$$

5.3.37. Написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $M(-3; 2; 7)$ на:

1) ось Ox;

2) плоскость Oyz.

5.3.38. Определить величины углов между осями координат и прямой $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+4}{\sqrt{2}} = \frac{z-1}{1}$.

5.3.39. Найти величину тупого угла между прямыми

$$\begin{cases} x = 5, \\ y = -3 + 3t, \\ z = 4 - t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = -2, \\ y = 1 + 2t, \\ z = t. \end{cases}$$

Контрольные вопросы и более сложные задачи

5.3.40. Найти координаты точки пересечения прямых $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{4}$ и $\frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{4}$.

5.3.41. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми $\frac{x-5}{-2} = \frac{y-8}{0} = \frac{z-2}{3}$ и $\frac{x-3}{2} = \frac{y-7}{-2} = \frac{z-1}{3}$.

5.3.42. Найти уравнение перпендикуляра, общего к двум скрещивающимся прямыми

$$\frac{x+4}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-4}{3} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = -2 + t, \\ y = 3 - t, \\ z = -1 + t. \end{cases}$$

5.3.43. Найти кратчайшее расстояние между диагональю куба с ребром, равным 1, и непересекающей ее диагональю грани.

5.3.44. Найти уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $M(2; -1; -3)$ на прямую $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+4}{-2}$.

5.3.45. Пересекаются ли прямые $\frac{x-6}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1}$ и $\frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-5}{4}$?