5.3.46. Найти уравнения прямых, проходящих через точку $(1; 1; 1)$
а) параллельно оси Oz;
б) перпендикулярно оси Oz.

5.3.47. Написать уравнение прямой, по которой плоскость $x-2y+1=0$ пересекает кооординатную плоскость Oxz.

§ 4. ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

Величина *угла между прямой* (L) $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ *и плоскостью* (Q) $Ax + By + Cz + D = 0$ определяется по формуле

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,. \tag{4.1}$$

Условие параллельности прямой (L) *и плоскости* (Q) имеет вид

$$Am + Bn + Cp = 0\,; \tag{4.2}$$

условие их перпендикулярности:

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}\,. \tag{4.3}$$

Для *нахождения точки пересечения прямой и плоскости* удобно воспользоваться параметрическими уравнениями прямой

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt; \end{cases}$$

координаты точки пересечения находятся из *системы уравнений*

$$\begin{cases} x = x_0 + mt,\ y = y_0 + nt,\ z = z_0 + pt, \\ Ax + By + Cz + D = 0. \end{cases} \tag{4.4}$$

Условие, при котором прямая (L) *лежит в плоскости* Q:

$$\begin{cases} Am + Bn + Cp = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \end{cases} \tag{4.5}$$

(Если $Am + Bn + Cp \neq 0$, то прямая пересекает плоскость; если $Am + {}$ ${}+ Bn + Cp = 0$ и $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$ — прямая параллельна плоскости.)

5.4.1. Найти координаты точки, симметричной точке $M_1(3; 4; 5)$ относительно плоскости $x - 2y + z - 6 = 0$.

❍ Точка M_2, симметричная точке M_1 относительно плоскости, находится на перпендикуляре к плоскости и является концом отрезка M_1M_2, для которого серединой будет точка N пересечения прямой M_1M_2 и плоскости. Направляющий вектор перпендикуляра к плоскости — это вектор-нормаль этой плоскости $\bar{n} = (1; -2; 1)$. Уравнение перпендикуляра к плоскости, проведенного через точку M_1, имеет вид

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-5}{1} (= t) \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = 3+t, \\ y = 4-2t, \\ z = 5+t. \end{cases}$$

Координаты точки N пересечения перпендикуляра с плоскостью находим, решая систему (см. (4.4))

$$\begin{cases} x = 3+t,\ y = 4-2t,\ z = 5+t, \\ x - 2y + z - 6 = 0. \end{cases}$$

Из равенства $(3+t)-2(4-2t)+(5+t)-6 = 0$ вытекает равенство $6t-6 = 0$, т. е. $t = 1$. Следовательно, $x = 3+1 = 4$, $y = 4-2 = 2$, $z = 5+1 = 6$, т. е. $N(4; 2; 6)$ — точка пересечения прямой и плоскости. А так как N — середина отрезка M_1M_2, то

$$x_N = \frac{x_{M_1} + x_{M_2}}{2}, \quad y_N = \frac{y_{M_1} + y_{M_2}}{2}, \quad z_N = \frac{z_{M_1} + z_{M_2}}{2}.$$

Имеем

$$4 = \frac{3 + x_{M_2}}{2}, \quad 2 = \frac{4 + y_{M_2}}{2}, \quad 6 = \frac{5 + z_{M_2}}{2}.$$

Отсюда находим $x_{M_2} = 5$, $y_{M_2} = 0$, $z_{M_2} = 7$, т.е. точка M_2 имеет координаты $(5; 0; 7)$. ●

5.4.2. Найти координаты точки, симметричной точке $M(2; 8; 0)$ относительно прямой $\frac{x-1}{-3} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-3}{-1}$.

5.4.3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2; -3; 0)$ и прямую

$$\begin{cases} 2x + y - 6z + 3 = 0, \\ x - y + 2z - 6 = 0. \end{cases}$$

❍ Один из способов решения этой задачи мы уже приводили (см. задачу 5.2.12). Рассмотрим другой подход к решению.

Составим уравнение пучка плоскостей, проходящих через данную прямую: $2x + y - 6z + 3 + \lambda(x - y + 2z - 6) = 0$ (см. (2.2)). Выделим среди них плоскость, проходящую через точку $M(2; -3; 0)$, подставив ее координаты в уравнение пучка:

$$2 \cdot 2 - 3 - 6 \cdot 0 + 3 + \lambda(2 + 3 + 2 \cdot 0 - 6) = 0.$$

Отсюда $4 + \lambda \cdot (-1) = 0$, т.е. $\lambda = 4$. Из уравнения пучка при $\lambda = 4$ находим уравнение искомой плоскости

$$2x + y - 6z + 3 + 4(x - y + 2z - 6) = 0,$$

т.е. $6x - 3y + 2z - 21 = 0$. ●

5.4.4. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\begin{cases} x - 3y + 5 = 0, \\ 2x + y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

и точку $M(0; 1; 2)$.

5.4.5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(4; -3; 6)$ перпендикулярно прямой $\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+5}{-2}$.

5.4.6. Найти величину угла между прямой $\frac{x-3}{1} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+7}{-2}$ и плоскостью $4x - 2y - 2z - 3 = 0$.

◑ Применяя формулу (4.1), находим

$$\sin\varphi = \frac{|4 \cdot 1 - 2 \cdot 1 - 2 \cdot (-2)|}{\sqrt{1+1+4} \cdot \sqrt{16+4+4}} = \frac{6}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{24}} = \frac{1}{2}.$$

Значит, $\varphi = \frac{\pi}{6}$. ●

5.4.7. Найти величину острого угла между прямой

$$\begin{cases} x - y + z = 0, \\ 2x + y - z - 3 = 0 \end{cases}$$

и плоскостью $2x + y + 2z - 5 = 0$.

5.4.8. Установить взаимное расположение прямой и плоскости:

1) $\begin{cases} x = 2 - 4t, \\ y = t, \\ z = -3 + 2t \end{cases}$ и $5x - 6y + 2z - 10 = 0$;

2) $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+4}{2}$ и $3x + y - 4z - 15 = 0$.

◑ 1) Имеем $\bar{s} = (-4; 1; 2)$, $\bar{n} = (5; -6; 2)$. Как видно координаты направляющего вектора $\bar{s}$ прямой и нормального вектора $\bar{n}$ плоскости не пропорциональны: прямая не перпендикулярна плоскости (см. (4.3)). Найдем значение выражения $Am + Bn + Cp$:

$$Am + Bn + Cp = 5 \cdot (-4) - 6 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = -20 - 6 + 4 = -22 \neq 0.$$

Условие (4.2) параллельности прямой и плоскости не выполняется. Значит, прямая *пересекает* плоскость.

2) Здесь $\bar{s} = (3; -1; 2)$, $\bar{n} = (3; 1; -4)$, $M_0(-1; 2; -4)$, $Am + Bn + Cp = 3 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) - 4 \cdot 2 = 9 - 1 - 8 = 0$. Следовательно, данная прямая параллельна плоскости или лежит на ней. Проверим условия (4.5) принадлежности прямой плоскости:

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 - 4 \cdot (-4) - 15 = 0.$$

Условия (4.5) выполняются, поэтому прямая *лежит в плоскости.* ●

5.4.9. Установить взаимное расположение прямой L и плоскости Q:

1) $\begin{cases} x - y + 4z - 6 = 0, \\ 2x + y - z + 3 = 0 \end{cases}$ (L) и $3x - y + 6z - 12 = 0$ (Q);

2) $\frac{x}{2} = \frac{y+13}{17} = \frac{z+7}{13}$ (L) и $5x - z = 4$ (Q).

Дополнительные задачи

5.4.10. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x - 0{,}5}{-2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z+2{,}5}{3}$ и перпендикулярной к плоскости $3x + 4y - 5z - 6 = 0$.

5.4.11. Написать уравнение плоскости, проходящей через параллельные прямые $\frac{x+1}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{-1}$ и $\frac{x-2}{-2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z}{-1}$.

5.4.12. Найти координаты точки пересечения прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{1}$ с плоскостью $3x - y + 2z + 5 = 0$.

5.4.13. Найти координаты проекции точки $M(2; 2; -2)$ на плоскость $3x - y + z - 13 = 0$.

5.4.14. Найти координаты проекции точки $M(-3; 0; 2)$ на прямую

$$\begin{cases} x = 5 - t, \\ y = 2t, \\ z = 3t. \end{cases}$$

5.4.15. При каком значении m прямая $\frac{x+10}{m} = \frac{y-7}{2} = \frac{z+2}{-6}$ параллельна плоскости $5x - 3y + 4z - 1 = 0$?

5.4.16. При каких значениях C и D прямая $\frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z}{7}$ лежит в плоскости $2x - y + Cz + D = 0$?

5.4.17. Написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $M(1; 1; 6)$ на прямую

$$\begin{cases} x = -1 + 3t, \\ y = 2t, \\ z = t. \end{cases}$$

5.4.18. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\begin{cases} x+2y-z+2=0, \\ 3x-y+z-5=0 \end{cases}$$

параллельно прямой

$$\begin{cases} x=1-t, \\ y=-2+2t, \\ z=1+2t. \end{cases}$$

5.4.19. Найти расстояние от точки $M(3;5;5)$ до прямой $\frac{x-1}{-2}=\frac{y}{4}=\frac{z}{1}$.

5.4.20. Прямая L проходит через точку $M(3;-4;0)$ и точку пересечения прямой $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+1}{1}$ с плоскостью $x+y-z+2=0$. Найти величину угла, образованного прямой L с плоскостью $2x+y+2z-5=0$.

5.4.21. Найти уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и образующей с плоскостью $\sqrt{2}x+y-z+2=0$ угол, равный $\frac{\pi}{4}$.

5.4.22. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\begin{cases} 2x-y+z-3=0, \\ x+y-3z-1=0 \end{cases}$$

и отсекающей на оси Oy отрезок, равный 3.

5.4.23. Найти расстояние d между параллельными прямыми:

1) $\begin{cases} x+z=1, \\ y+2z=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x+z=1, \\ y+2z=1; \end{cases}$

2) $\frac{x}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z-1}{-3}$ и $\frac{x-2}{4}=\frac{y+3}{-8}=\frac{z+1}{-12}$.

5.4.24. Плоскость α проходит через точки $M_1(-6;1;-5)$, $M_2(7;-2;-1)$, $M_3(10;-7;1)$. Найти точку, симметричную точке $(3;-4;-6)$ относительно плоскости α.

5.4.25. Найти расстояние между прямыми $\frac{x-9}{-6}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{1}$ и $\frac{x+5}{3}=\frac{y+5}{2}=\frac{z-1}{-2}$.

Контрольные вопросы и более сложные задачи

5.4.26. Найти уравнение проекции прямой $\frac{x}{5}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+1}{-3}$ на плоскость, заданную уравнением $2x-3y+z-4=0$.

5.4.27. Записать уравнение плоскости, проходящей через данную точку параллельно двум данным прямым.

5.4.28. На плоскости $x-2y+4z-28=0$ найти точку M_0, сумма расстояний от которой до точек $M_1(4;2;1)$ и $M_2(-1;1;1)$ была бы наименьшей.