5.4.29. Найти уравнения плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей

$$\begin{cases} x + 5y + z = 0, \\ y - z + 4 = 0 \end{cases}$$

и образующей угол $\varphi = \frac{\pi}{4}$ с плоскостью $x - 4y - 8z + 12 = 0$.

5.4.30*. Доказать, что кратчайшее расстояние между прямыми $\bar{r} = \bar{r}_1 + \bar{s}_1 t$ и $\bar{r} = \bar{r}_2 + \bar{s}_2 t$ может быть вычислено по формуле

$$d = \frac{|(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)\bar{s}_1\bar{s}_2|}{|\bar{s}_1 \times \bar{s}_2|}.$$

5.4.31. Можно ли через прямую $\frac{x+2}{3} = \frac{y-6}{2} = \frac{z+1}{-3}$ провести плоскость параллельно плоскости $12x - y + 10z - 3 = 0$?

5.4.32. Каково уравнение прямой, проходящей через точку $O(0;0;0)$ перпендикулярно к плоскости $x + y + z + 1 = 0$?

5.4.33. Лежит ли прямая $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-7}$ в плоскости $3x + 2y + z = 0$? А в плоскости $3x + 2y + z - 1 = 0$?

5.4.34. При каких значениях p и B прямая $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-3}{p}$ перпендикулярна плоскости $6x + By - 3z + 1 = 0$?

5.4.35. При каком значении A плоскость $Ax - 2y + 4z + 5 = 0$ параллельна прямой

$$\begin{cases} y - z = 0, \\ x + y = 0? \end{cases}$$

§ 5. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Если в пространстве $\mathbb{R}^3$ ввести прямоугольную систему координат $Oxyz$, то каждая *поверхность* определяется некоторым *уравнением* $F(x, y, z) = 0$, (x, y, z) — координаты любой точки поверхности. Если $F(x, y, z)$ — *многочлены не выше второй* степени относительно совокупности переменных x, y, z, то уравнение $F(x, y, z) = 0$ *называется уравнением второго порядка*, а поверхность, изображаемая этим уравнением называется *поверхностью второго порядка.*

Если поверхность имеет специфическое расположение относительно системы координат (например, симметрична относительно некоторых координатных плоскостей, или имеет вершину в начале координат и пр.), то ее уравнение имеет достаточно простой вид, который называется *каноническим.*

Канонический вид уравнений поверхностей второго порядка. Геометрическое изображение

1) Сфера радиуса R с центром в начале координат (рис. 56)

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

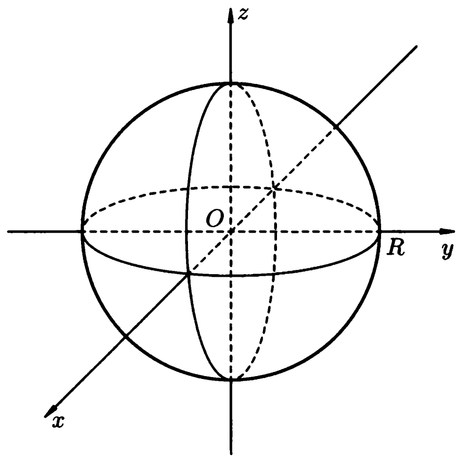

Рис. 56

Уравнение $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$ изображает сферу радиуса R с центром в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

2) *Эллипсоид* с полуосями a, b, c и центром в начале координат (рис. 57)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

При $a = b = c = R$ *эллипсоид* превращается в сферу радиуса R.

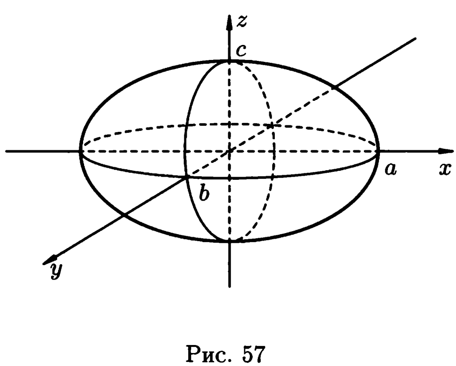

Рис. 57

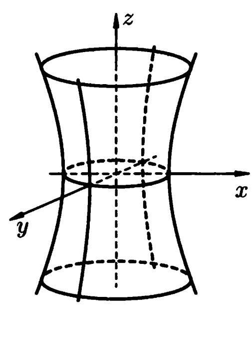

Рис. 58

14 – 2361

3) *Однополостный гиперболоид* с полуосями a, b, c и осью Oz (рис. 58)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Сечения гиперболоида горизонтальными плоскостями $z = h$ являются эллипсами

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}.$$

Сечения гиперболоида вертикальными плоскостями $x = h$ или $y = h$ являются гиперболами.

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{a^2} \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}.$$

4) *Двуполостный гиперболоид* с полуосями a, b, c и осью Oz (рис. 59)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

Сечения гиперболоида горизонтальными плоскостями $z = h$, $|h| > c$ являются эллипсами

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1.$$

Сечения гиперболоида вертикальными плоскостями $x = h$ или $y = h$ являются гиперболами.

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -\frac{h^2}{a^2} - 1 \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -\frac{h^2}{b^2} - 1.$$

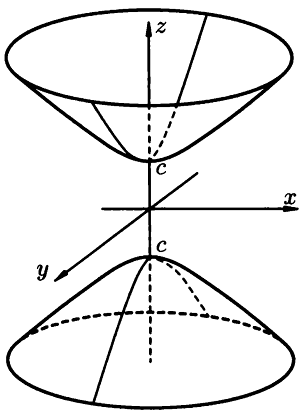

Рис. 59

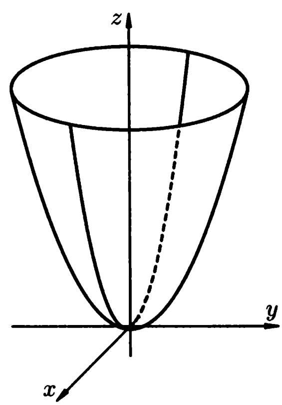

Рис. 60

5) *Параболоид* эллиптический с параметрами a, b, p и вершиной в начале координат (рис. 60)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz.$$

Сечения параболоида горизонтальными плоскостями $z = h$ ($h > 0$ при $p > 0$, $h < 0$ при $p < 0$) есть эллипсы

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2ph.$$

Сечения параболоида вертикальными плоскостями $x = h$ или $y = h$ являются параболами.

$$\frac{y^2}{b^2} = 2pz - \frac{h^2}{a^2} \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{a^2} = 2pz - \frac{h^2}{b^2}.$$

6) *Параболоид гиперболический* с параметрами a, b, p и вершиной в начале координат (рис. 61)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz.$$

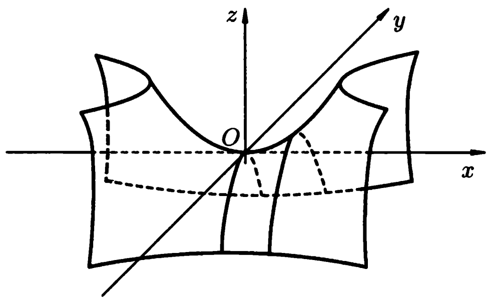

Рис. 61

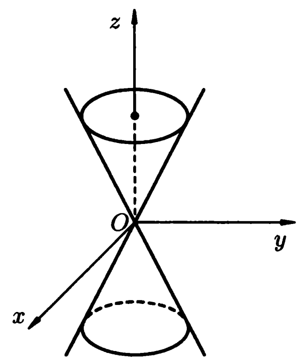

Рис. 62

Сечения параболоида горизонтальными плоскостями $z = h$ представляют собой гиперболы

$$\frac{x^2}{2a^2ph} - \frac{y^2}{2b^2ph} = 1.$$

Сечения вертикальными плоскостями $x = h$ и $y = h$ являются параболами

$$\frac{y^2}{b^2} = -2pz + \frac{x^2}{a^2} \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{a^2} = 2pz + \frac{h^2}{b^2}.$$

7) *Конус эллиптический* с вершиной в начале координат и осью Oz (рис. 62)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Если $a = b$, то конус круглый или круговой. Пересечение конуса горизонтальными плоскостями являются эллипсами

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2}$$

(при $h = 0$ эллипс вырождается в точку).

Сечения конуса вертикальными плоскостями $x = h$ и $y = h$ являются гиперболами

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -\frac{h^2}{a^2} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -\frac{h^2}{b^2} \quad \text{при} \quad h \neq 0,$$

или парой пересекающих прямых

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \text{при} \quad h = 0.$$

К поверхностям второго порядка относятся цилиндры, направляющие которых — линии второго порядка. Мы ограничимся перечислением цилиндров, направляющие которых расположены в плоскости Oxy, а образующие — прямые, параллельные оси Oz.

8) Цилиндры:

(1) *Эллиптический* (рис. 63)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

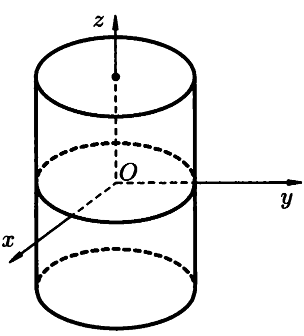

Рис. 63

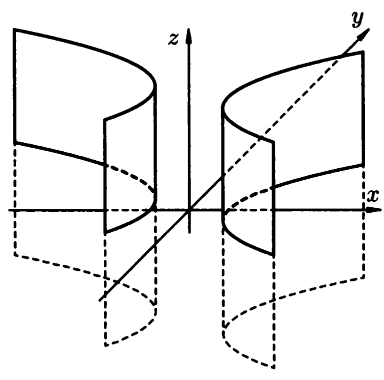

Рис. 64

Если $a = b = R$, то цилиндр — круговой $x^2 + y^2 = R$.

(2) *Гиперболический* (рис. 64)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

(3) *Параболический* (рис. 65)

$$y^2 = 2px.$$

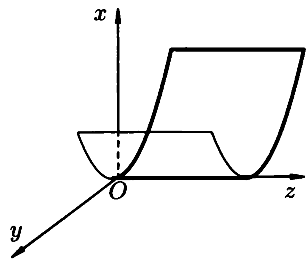

Рис. 65

Примечание. Если в каждом из приведенных канонических уравнений заменить $x = x_1 - x_0$, $y = y_1 - y_0$, $z = z_1 - z_0$, где (x_0, y_0, z_0) — фиксированные числа, то новые уравнения представляют те же поверхности и они занимают в системе координат $O_1x_1y_1z_1$ такое же положение относительно плоскостей $x_1 = x_0$, $y_1 = y_0$, $z_1 = z_0$ как поверхности, заданные канонически относительно координатных плоскостей $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Другими словами, приведенные формулы представляют параллельный сдвиг поверхности на вектор $\overline{OM} = (x_0, y_0, z_0)$.

Метод параллельных сечений

Если задано уравнение той или иной поверхности, то возникает задача исследования ее формы и расположения относительно координатных осей. Для решения этой задачи обычно применяют метод параллельных сечений: поверхность пересекается несколькими плоскостями, параллельными плоскостям координат. Форма и размер полученных сечений позволяют выяснить геометрическую форму самой поверхности.

Пересечение поверхности с плоскостью

Линию в пространстве $\mathbb{R}^3$ можно определить как пересечение двух поверхностей. Таким образом уравнение линии можно записать в виде системы

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Для исследования этой линии удобно воспользоваться цилиндром, проектирующем ее на ту или иную координатную плоскость. Если, например, проектируем линию на плоскость Oxy, то исключим z из системы и получим уравнение $\varphi(x, y) = 0$. Оно изображает направляющую проектрующего цилиндра на плоскость Oxy. В зависимости от того, будет ли $\varphi(x, y) = 0$ эллипсом, гиперболой, параболой, парой прямых — изучаемая линия сохранит соответствующее название.

5.5.1. Составить уравнение сферы с центром в точке $M_0(-5; 3; 2)$ и касающейся плоскости $2x - 2y + z - 4 = 0$.

Для составления уравнения сферы нужен ее радиус. В данном случае R — расстояние от M_0 до плоскости:

$$R = \frac{|(-5)\cdot 2 - 2\cdot 3 + 2 - 4|}{\sqrt{2^2+2^2+1}} = 6.$$

Искомое уравнение: $(x+5)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 36$. ●

5.5.2. Составить уравнение сферы с центром в точке $M_0(0;4;0)$, если она касается плоскости $2x+6y-3z-3=0$.

5.5.3. Составить уравнение сферы, касающейся двух параллельных плоскостей $6x-3y-2z-35=0$ и $6x-3y-2z+63=0$, если ее центр расположен на прямой $\frac{x-11}{6} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z+3}{-2}$.

1) Определим точки M_1 и M_2 пересечения прямой с плоскостями (заметим, что прямая перпендикулярна плоскостям). Для этого параметрические уравнения прямой $x = 11+6t$, $y=-4-3t$, $z=-3-2t$ подставляем в уравнения плоскостей, находим t и возвращаемся к этим уравнениям.

$$6(11+6t) - 3(-4-3t) - 2(-3-2t) - 35 = 0,$$
$$t=-1, \quad M_1(5,-1,-1).$$

Аналогично находим $M_2(-7,5,3)$.

2) Центр сферы M_0 — середина отрезка M_1M_2: $M_0(-1,2,1)$. Радиус сферы $R = M_0M_1 = \sqrt{36+9+4} = 7$.

3) Уравнение сферы $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=49$. ●

5.5.4. Составим уравнение сферы, проходящей через четыре точки $O(0;0;0)$, $A(2;0;0)$, $B(1;1;0)$, $C(1;0;-1)$.

Уравнение сферы ищем в виде

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2,$$

где (a,b,c) — координаты центра и R — радиус неизвестные. Координаты данных точек превращают уравнение сферы в верные равенства, т. е.

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2=R^2, \\ (2-a)^2+b^2+c^2=R^2, \\ (1-a)^2+(1-b)^2+c^2=R^2, \\ (1-a)^2+b^2+(1+c)^2=R^2. \end{cases}$$

После возведения в квадрат, приведения подобных слагаемых получается система, из которой $a=1$, $b=0$, $c=0$, $R^2=1$.

Ответ. $(x-1)^2+y^2+z^2=1$. ●

5.5.5. Составить уравнение сферы если:

1) точки $A(3;-2;6)$ и $B(5;2;-2)$ являются концами одного из ее диаметров;

2) имеет центр в точке $M_0(5;0;3)$ и проходит через точку $A(4;1;-1)$;

3) имеет центр в точке $M_0(2;1;3)$ и касается плоскости $z=6$;

4) имеет центр в точке $M_0(5;2;-1)$ и касается плоскости $2x-y+3z+23=0$;

5) она симметрична сфере $(x-1)^2+(y-3)^2+(z+4)^2=46$ относительно плоскости $3x+y-2z=0$;

6) она проходит через точки $A(1,-6,-2)$, $B(4;-3;2)$, $C(-3;-3;9)$ и $D(4;1;6)$.

5.5.6. Найти точки пересечения поверхности $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$ и прямой $\frac{x}{4}=\frac{y}{-3}=\frac{z+2}{4}$.

◐ Параметрические уравнения прямой $x=4t$, $y=-3t$, $z=-2+4t$ подставим в уравнение однополостного гиперболоида и определим значение t: $\frac{16t^2}{16}+\frac{9t^2}{9}-\frac{(4t-2)^2}{4}=1$, $(t-1)^2=0$, $t_{1,2}=1$. Следовательно, $x=4$, $y=-3$, $z=2$. Прямая имеет с гиперболоидом две совпадающие точки пересечения, т. е. прямая касается поверхности гиперболоида в точке $M_1(4;-3;2)$. ●

5.5.7. При каких значениях параметра p плоскость $2x-2y-z=p$ касается сферы $x^2+y^2+z^2=81$?

◐ Если плоскость касается сферы, то расстояние от ее центра до плоскости равно радиусу сферы, т. е. $\frac{|2\cdot 0-2\cdot 0-0-p|}{\sqrt{4+4+1}}=9$. Отсюда $|p|=27$, т. е. $p=\pm 27$. ●

5.5.8. Установить при каких m плоскость $y+mz=1$ пересекает двуполостный гиперболоид $x^2+y^2-z^2=-1$:

а) по эллипсу,

б) по гиперболе.

5.5.9. Установить при каких m плоскость $my+z=2$ пересекает эллиптический параболоид $y=\frac{x^2}{3}+\frac{z^2}{2}$:

а) по эллипсу,

б) по параболе.

5.5.10. Методом параллельных сечений исследовать поверхность, определяемую уравнением $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=-1$.

◐ 1) Перепишем уравнение в виде $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=\frac{z^2}{4}-1$ и пересекаем поверхность плоскостями $z=h$ параллельными координатной плоскости Oxy.

В сечениях получаются линии с уравнениями $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = \frac{h^2}{4} - 1$.

При $|h| < 2$ эти уравнения не имеют изображения (мнимые эллипсы) при $h = \pm 2$ они изображают точки $(0;0;2)$ и $(0;0;-2)$, а при $|h|^2 > 2$ получаются эллипсы $\frac{x^2}{(4c)^2} + \frac{y^2}{(3c)^2} = 1$, где $c = \sqrt{\frac{h^2}{4} - 1}$.

С увеличением $|h|$ увеличиваются и полуоси эллипсов $4c$ и $3c$, т. е. эллипсы расширяются (рис. 66). Поверхность симметрична относительно плоскости Oxy.

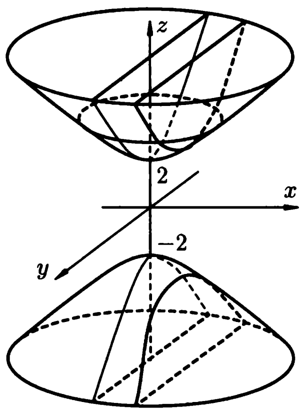

Рис. 66

2) Перепишем уравнение поверхности в виде $\frac{x^2}{16} - \frac{z^2}{9} = -\frac{y^2}{9} - 1$ и пересечем ее вертикальными плоскостями $y = l$. При каждом $l \in (-\infty; +\infty)$ соответствующие уравнения описывают гиперболы. В частности, при $l = 0$ получаем гиперболу, $\frac{x^2}{16} - \frac{z^2}{4} = -1$, расположенную в плоскости Oxz.

3) Сечения поверхности плоскостями $x = r$ также гиперболы

$$\frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = -1 - \frac{r^2}{16}.$$

Но из пп. 1) и 2) уже можно сделать вывод о строении поверхности: она состоит из эллипсов, «нанизанных» на гиперболу $\frac{x^2}{16} - \frac{z^2}{4} = -1$ $(l = 0)$. Поскольку два сечения, параллельных Oxz и Oyz — гиперболы, а одно — параллельное Oxy —

эллипс, то поверхность называется гиперболоидом эллиптическим; для уточнения — двуполостный, ибо состоит из двух отдельных частей (над и под плоскостью Oxy).

5.5.11. Установить тип заданных поверхностей и построить их.

1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{81} = 1$;

2) $x^2 + y^2 - 4z^2 = -1$;

3) $3x^2 + y^2 = 2a(z-2)$;

4) $2y = x^2 - \frac{z^2}{4}$;

5) $y^2 = 15z$;

6) $z = 5 - x^2 - y^2$;

7) $x^2 - 9y^2 = 4z^2$;

8) $x^2 = 5y - 1$;

9) $2x^2 - 4x + y^2 - 6y - z^2 = 0$;

10) $2x^2 - 7y^2 + 11z^2 = 0$;

11) $x + 2 = y^2 - 3y + 3z^2 + 6z$;

12) $x^2 = yz$.

5.5.12. Определить линию пересечения поверхностей

$$(x-4)^2 + (y-7)^2 + (z+1)^2 = 36 \quad \text{и} \quad 3x + y - z - 9 = 0.$$

Первая поверхность — это сфера, вторая — плоскость. Они пересекаются или по окружности, или в одной точке, или вовсе не пересекаются.

Найдем расстояние d от центра сферы $M_0(4; 7; -1)$ до плоскости $3x + y - z - 9 = 0$.

$$d = \frac{|3 \cdot 4 + 7 + 1 - 9|}{\sqrt{3^2 + 1 + 1}} = \frac{11}{\sqrt{11}} = \sqrt{11}.$$

Поскольку $d < R$ ($R = 6$ — радиус сферы), то плоскость пересекает сферу по окружности.

Центр $O(x_1; y_1; z_1)$ этой окружности расположен на перпендикуляре M_0O, опущенном из центра сферы M_0 на заданную плоскость (рис. 67).

Уравнение перпендикуляра M_0O в параметрической форме имеет вид

$$x = 4 + 3t, \quad y = 7 + t, \quad z = -1 - y.$$

Подставим эти равенства в уравнение плоскости и находим t. $3(4+3t) + (7+t) - (-1-t) - 9 = 0$, $t = -1$.

Подставим $t = -1$ в параметрические уравнения перпендикуляра M_0O. Находим: $x = 1$, $y = 6$, $z = 0$, т. е. $O(1; 6; 0)$ — центр окружности пересечения сферы и плоскости.

Из ΔOM_0A (рис. 67) находим $r^2 = R^2 - d^2$, $r^2 = 36 - 11 = 25$, $r = 5$.

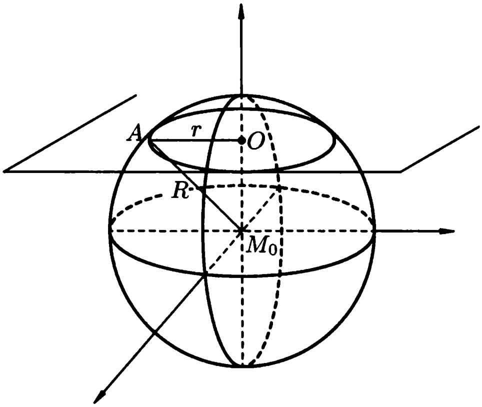

Рис. 67

Таким образом получено, что кривая

$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y-7)^2 + (z+1)^2 = 36, \\ 3x + y - z - 9 = 0 \end{cases}$$

представляет собой окружность радиуса 5 с центром в точке $O(1;6;0)$. ●

5.5.13. Составить уравнения касательных плоскостей к сфере $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 6$ в точках ее пересечения с прямой $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}$.

◑ Точки пересечения прямой со сферой получаются подстановкой равенств $x = 1+t$, $y = -t$, $z = 1+2t$ в уравнение сферы, определением t и подстановкой обратно в уравнения прямой. Имеем $(1+t-2)^2 + (-t+1)^2 + (1+2t-3)^2 = 6$, $6(t-1)^2 = 6$, $t_1 = 0$, $t_2 = 2$. Далее $x_1 = 1$, $y_1 = 0$, $z_1 = 1$, $x_2 = 3$, $y_2 = -2$, $z_2 = 5$. Итак, $M_1(1;0;1)$, $M_2(3;-2;5)$ — точки пересечения прямой и сферы.

Составим уравнение первой касательной плоскости, проходящей через $M_1(1;0;1)$. Ее нормальный вектор $\overline{M_0M_1}$, где $M_0(2;-1;3)$ центр сферы: $\overline{M_0M_1} = (-1;+1;-2)$, а уравнение плоскости: $-(x-1) + y - 2(z-1) = 0$ или $x - y + 2z - 3 = 0$.

Уравнение второй плоскости, по аналогии: $x - y + 2z - 15 = 0$.

Полученные плоскости параллельны потому, что данная прямая проходит через центр сферы $M_0(2;-1;3)$ (получается при $t = 1$). ●

5.5.14. Установить, что плоскость $y-2=0$ пресекает эллипсоид $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}+\frac{z^2}{9}=1$ по эллипсу. Найти его полуоси и вершины.

○ Пересечение двух поверхностей в пространстве преставляет некоторую линию, принадлежащую как одной так и другой поверхности. Уравнение этой линии в нашем случае имеет вид

$$\begin{cases} \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}+\frac{z^2}{9}=1, \\ y-2=0. \end{cases}$$

Подставим $y=2$ в первое уравнение и получаем $\frac{x^2}{16}+\frac{z^2}{9}=\frac{1}{2}$. Это уравнение эллипса, расположенного в плоскости $y-2=0$. Поскольку каноническое уравнение полученного эллипса имеет вид $\frac{x^2}{8}+\frac{z^2}{4{,}5}=1$, то его полуоси равны $a=\sqrt{8}$ и $b=\sqrt{4{,}5}$ ($c^2=a^2-b^2$, $c=\sqrt{3{,}5}$), а вершины эллипса расположены в точках $A_1(-\sqrt{8};2;0)$ и $A_2(8;2;0)$ — на большем диаметре, $B_1(0;2;-\sqrt{4{,}5})$ и $B_2(0;2;\sqrt{4{,}5})$ — на меньшем диаметре. ●

5.5.15. Исследовать линию пересечения гиперболоида $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-z^2=1$ с плоскостью $4x-3y-12z-6=0$, пользуясь ее проекциями на координатные плоскости.

○ Линия пересечения гиперболоида с плоскостью определяется системой

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-z^2=1, \\ 4x-3y-12z-6=0. \end{cases}$$

Выражаем из второго уравнения

$$z=\frac{4x-3y-6}{12} \quad \text{и} \quad z^2=\frac{16x^2+9y^2+36-24xy-48x+36y}{144}$$

и подставляем в первое уравнение. Получаем

$$9y^2+8xy+16x-12y-60=0.$$

Это уравнение проекции на плоскость Oxy линии пересечения гиперболоида с плоскостью. Вместе с тем это уравнение цилиндрической поверхности с образующей, параллельной оси Oz, направляющая которой есть исследуемая линия. Уравнение этой линии следует привести к каноническому виду известными формулами преобразования координат (поворот осей и сдвиг). В данном случае методом разложения на множители можно получить $(y+2)(9y+8x-30)=0$, т. е. наша линия представляет пару прямых $y+2=0$ и $8x+9y-30=0$, которые пересекаются в точке

$$\begin{cases} y+2=0, \\ 8x+9y-30=0, \end{cases}$$

т. е. $M_1(6; -2)$.

По аналогии с этим, проектируем искомую линию на плоскость Oxz. Получаем пару прямых $x - 3z = 0$ и $5x - 9z - 12 = 0$, которые пересекаются в точке $M_2(6; 2)$.

Наконец, на плоскость Oyz искомая линия проектируется в прямые $y + 2 = 0$ и $5y + 8z - 6 = 0$, которые пересекаются в точке $M_3(-2; 2)$.

Если проекции на координатные плоскости данной линии являются пересекающимися прямыми, то сама эта линия представляет пару пересекающихся в точке $M(6; -2; 2)$ прямых. Координаты M получаются из координат ее проекций M_1, M_2, M_3. ●

5.5.16. Установить какие линии определяются системами уравнений:

1) $\begin{cases} 2z = \dfrac{(x-1)^2}{3} + \dfrac{(y+1)^2}{6}, \\ 3x - y + 6z - 18 = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2z = \dfrac{(x-1)^2}{4} - \dfrac{(y+1)^2}{3}, \\ x - 2y - 1 = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{(x-1)^2}{4} + \dfrac{(y+1)^2}{9} - \dfrac{z^2}{36} = 1, \\ 9x - 6y + 2z - 43 = 0. \end{cases}$

5.5.17. Дан гиперболический параболоид $x^2 - \frac{y^2}{4} = z$ и одна из его касательных плоскостей: $10x - 2y - z - 21 = 0$. Найти уравнения каждой из тех двух прямых, по которой плоскость касается с параболоидом.

◐ Уравнения искомых прямых задаются системой уравнений, которую последовательно преобразуем.

$$\begin{cases} 10x - 2y - z - 21 = 0, \\ x^2 - \dfrac{y^2}{4} = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 10x - 2y - 21, \\ x^2 - \dfrac{y^2}{4} = 10x - 2y - 21 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 10x - 2y - 21, \\ (2x - y - 6)(2x + y - 14) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 10x - 2y - z - 21 = 0, \\ 2x - y - 6 = 0 \end{cases} \qquad (5.1) \\ \\ \begin{cases} 10x - 2y - z - 21 = 0, \\ 2x + y - 14 = 0. \end{cases} \qquad (5.2) \end{array}\right.$$

Уравнения прямых (5.1) и (5.2) получены в общем виде. Приведем (5.1) к каноническому виду. Для этого найдем две точки на прямой (5.1):

$$z=0:\begin{cases}10x-2y=21,\\ 2x-y=6\end{cases}\Rightarrow M_1\left(\frac{3}{2};-3;0\right);$$

$$y=0:\begin{cases}10x-z=21,\\ 2x-6=0\end{cases}\Rightarrow M_2(3;0;9).$$

Составим уравнение прямой, проходящей через точки M_1 и M_2. $\overline{M_1M_2}=\left(\frac{3}{2};3;9\right)=\frac{3}{2}(1;2;6)$. Прямая (5.1) имеет вид $\frac{x-3}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-9}{6}$ или параметрически: $x=3+t$, $y=2t$, $z=9+6t$. (Уравнение прямой определяется неоднозначно: например, при $t=2$ находим на этой прямой точку $x_0=5$, $y_0=4$, $z_0=21$, а потому ее уравнение можно записать и так $\frac{x-5}{1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-21}{6}$). По аналогии, прямую (5.2) можно привести к виду $\frac{x-5}{1}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z-21}{14}$. ●

Дополнительные задачи

5.5.18. Составить уравнение сферы радиуса $R=9$, проходящей через точки $A(-5;10;-1)$, $B(1;-2;-1)$, $C(-8;-2;2)$.

5.5.19. Сфера проходит через три точки $A(-2;4;1)$, $B(-5;0;0)$, $C(3;1;-3)$, а ее центр лежит на плоскости $2x+y-z+3=0$. Составить ее уравнение.

5.5.20. Составить уравнение сферы, проходящей через четыре точки: $A(1;-2;-1)$, $B(4;1;11)$, $C(-8;-2;2)$ и $D(-5;10;-1)$.

5.5.21. Установить как расположена точка $A(2;-1;3)$ относительно каждой сферы — на сфере, внутри нее или вне:
1) $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=4$;
2) $(x+14)^2+(y-11)^2+(z+12)^2=625$;
3) $(x-6)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=25$.

5.5.22. Определить центр $M_0(x_0;y_0;z_0)$ и радиус окружности:

$$\begin{cases}(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100,\\ 2x-2y-z+9=0.\end{cases}$$

5.5.23. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения двух сфер.

$$2x^2+2y^2+2z^2+3x-2y+z-5=0$$
$$x^2+y^2+z^2-x+3y-2z+1=0.$$

5.5.24. Составить уравнение сферы, проходящей через начало координат и окружность:

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=25,\\ 2x-3y+5z-5=0.\end{cases}$$

5.5.25. Методом параллельных сечений исследовать геометрическую форму поверхностей заданных уравнениями:

1) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{25}=1$;

2) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}=1$;

3) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}-\frac{z^2}{4}=1$;

4) $z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}$;

5) $z=\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}$;

6) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$;

7) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$;

8) $x^2=2y$.

Более сложные задачи

5.5.26. Определить, как расположена прямая относительно сферы — пересекает ли, касается или проходит вне ее. Прямая и сфера заданы следующими уравнениями:

1) $\frac{x-2}{-2}=\frac{y+\frac{7}{2}}{3}=\frac{z+2}{1}$, $x^2+y^2+z^2-4y-3z+\frac{1}{2}=0$;

2) $x=5+3t, y=2t, z=-25-2t, x^2+y^2+z^2-4x-6y+2z-67=0$;

3) $\begin{cases}2x-y+2z-12=0,\\ 2x-4y-z+6=0,\end{cases}$ $x^2+y^2+z^2-2x+2y+4z-43=0$.

5.5.27. Найти кратчайшее расстояние от точки A до сферы с заданным уравнением:

1) $A(-2;6;3)$, $x^2+y^2+z^2=4$

2) $A(1;-1;3)$, $x^2+y^2+z^2-6x+4y-10z-62=0$.

5.5.28. Составить уравнение плоскости, касательной к сфере $x^2+y^2+z^2=49$ в точке $M_1(6;-3;-2)$.

5.5.29. Доказать, что плоскость $2x-6y+3z-49=0$ касается сферы $x^2+y^2+z^2=49$ и вычислить координаты точки касания.

5.5.30. Составить уравнения плоскостей, касательных к сфере $x^2+y^2+z^2=9$ и параллельных плоскости $x+2y-2z+15=0$.

5.5.31. Доказать, что в каждом из указанных ниже случаев заданные поверхность и плоскость имеют одну общую точку и найти ее координаты:

1) $\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}=2y$, $2x-2y-z-10=0$,