к параболе в точке M, надо найти значение частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$ в этой точке.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=6x;\quad \left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]_{M_0}=6;\ \operatorname{tg}\alpha=6;\ \alpha=80^\circ 32'.$$

51. Через точку $M_0(2, 2, 1)$ сферы $x^2+y^2+z^2=9$ проведена плоскость P параллельно плоскости yOz. Найти угол β между осью Oy и касательной, проведенной к линии пересечения сферы с плоскостью P в точке M_0.

52. Через точку M_0 (1, 2, 10) поверхности $z=x^2+2y^2+1$ проведена плоскость Q параллельно плоскости xOz. Найти угол φ между осью Ox и касательной, проведенной к линии пересечения данной поверхности с плоскостью Q в точке M_0.

§ 6. ПОЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Известно, что полным приращением функции $z=f(x,y)$ называется разность $f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x, y)$, где Δx и Δy—соответствующие приращения аргументов x и y.

$$\Delta z=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y). \qquad (1)$$

Полным дифференциалом функции $z=f(x, y)$ называется главная часть полного приращения Δz, линейная относительно приращений аргументов Δx и Δy. Полный дифференциал функции $z=f(x, y)$ обозначается через dz и вычисляется по формуле

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y. \qquad (2)$$

Дифференциалы независимых переменных совпадают с их приращениями, то есть $dx=\Delta x$ и $dy=\Delta y$. Поэтому формулу полного дифференциала можно записать так:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy. \qquad (3)$$

Произведение частной производной на приращение (дифференциал) соответствующего аргумента называется *частным дифференциалом*.

2ПД-5—И

$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} dx$ есть частный дифференциал функции z по аргументу x, а $d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} dy$ есть частный дифференциал функции z по аргументу y. Следовательно,

$$dz = d_x z + d_y z, \tag{4}$$

то есть полный дифференциал dz равен сумме частных дифференциалов $d_x z$ и $d_y z$.

Следующая теорема выражает достаточные условия существования полного дифференциала: если функция $z = f(x, y)$ имеет в точке $P_0(x_0, y_0)$ непрерывные частные производные, то она имеет в этой точке полный дифференциал. Если функция $z = f(x, y)$ имеет полный дифференциал в точке $P_0(x_0, y_0)$, то она называется **дифференцируемой** в этой точке.

Аналогично определяется и вычисляется полный дифференциал функции любого числа переменных. Полный дифференциал функции трех независимых переменных $u = f(x, y, z)$ вычисляется по формуле

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz. \tag{5}$$

53. Найти полный дифференциал dz функции $z = x^3 y + x \operatorname{tg} y$.

Решение. Находим частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y + \operatorname{tg} y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^3 + x \sec^2 y.$$

Применяя формулу (3), получим полный дифференциал dz.

$$dz = (3x^2 y + \operatorname{tg} y)\, dx + (x^3 + x \sec^2 y)\, dy.$$

54. Найти полный дифференциал du функции

$$u = xy^2 - \arcsin z.$$

Решение. $\frac{\partial u}{\partial x} = y^2$; $\frac{\partial u}{\partial y} = 2xy$; $\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$.

Применяя формулу (5), получим полный дифференциал du.

$$du = y^2\, dx + 2xy\, dy - \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\, dz.$$

Градиент.

55. Найти полные дифференциалы следующих функций:

а) $z = x \sin y + e^x y^3$; б) $u = y^3 + x^2 \ln \sin z$;

в) $u = \operatorname{arc\,tg} \frac{x \cdot y}{z}$; г) $u = e^{\frac{x}{z}} + e^{\frac{y}{z}}$.

56. Вычислить значение полного дифференциала функции $z = x^2y^3 + x^2 - 5y^2$ в точке $P(2, 1)$ при условии, что $\Delta x = 0,02$ и $\Delta y = -0,03$.

Решение. Находим полный дифференциал данной функции:

$$dz = (2xy^3 + 2x)\ \Delta x + (3x^2y^2 - 10y)\ \Delta y.$$

Значение полного дифференциала в точке $P(2, 1)$, то есть при $x = 2$ и $y = 1$ и при заданных приращениях Δx и Δy равно:

$$[dz]_P = (4+4) \cdot 0,02 + (12-10) \cdot (-0,03) = 0,16 - 0,06 = 0,1.$$

57. Вычислить значение полного дифференциала функции

$z = x^3 + y^4$ в точке $P(1, -2)$, если $\Delta x = -0,01$, $\Delta y = 0,02$.

58. Вычислить значение полного дифференциала функции $u = x^2 - 3xy + 2yz$ в точке $M(2, -1, 3)$ при условии, что $\Delta x = 0,02$, $\Delta y = 0,03$ и $\Delta z = -0,03$.

§ 7. ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА В ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$. Полное приращение этой функции находится по формуле

$$\Delta z = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f(x,\ y), \tag{1}$$

где Δx и Δy — приращения аргументов x и y.

Известно, что полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ определяется формулой

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y. \tag{2}$$

Полный дифференциал dz является главной частью полного приращения Δz. Если приращения Δx и Δy малы по абсолютной величине, то Δz приближенно равно dz, то есть имеет место приближенное равенство $\Delta z \approx dz$, или

$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)\approx dz,$$

откуда

$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)\approx f(x,\ y)+dz.$$

Пусть функция $z=f(x, y)$ дифференцируема в точке $P_1(x_1, y_1)$. Тогда

$$f(x_1+\Delta x,\ y_1+\Delta y)\approx f(x_1,\ y_1)+[dz]_{P_1}.$$

Пусть $x_2=x_1+\Delta x$ и $y_2=y_1+\Delta y$. Тогда получаем

$$f(x_2,\ y_2)\approx f(x_1,\ y_1)+[dz]_{P_1}. \qquad (3)$$

Приближенное равенство (3) дает возможность найти значение заданной функции $z=f(x, y)$ в точке $P_2(x_2, y_2)$, если известно значение функции и ее полного дифференциала в точке $P_1(x_1, y_1)$. При этом $\Delta x=x_2-x_1$ и $\Delta y=y_2-y_1$.

59. Вычислить приближенное значение функции $z=\sqrt{x^2+y^2}$ в точке $P_2(2{,}97;\ 4{,}02)$, исходя из ее точного значения в точке $P_1(3, 4)$.

Решение. Воспользуемся приближенным равенством (3). Для этого находим полный дифференциал заданной функции и его значение в точке P_1 (3, 4).

$$dz=\frac{x\cdot\Delta x+y\cdot\Delta y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\Delta x=2{,}97-3=-0{,}03,$$

$$\Delta y=4{,}02-4=0{,}2.$$

При $x=3$ и $y=4$ получаем

$$[dz]_{P_1}=\frac{3\cdot(-0{,}03)+4\cdot 0{,}02}{9+16}=-0{,}002.$$

Следовательно,

$$[z]_{P_2}=z(2{,}97,\ 4{,}02)\approx z(3{,}4)-0{,}002=4{,}998.$$

60. Вычислить приближенно число $A=(1{,}03)^{2{,}04}$.

Решение. Рассмотрим функцию $z=x^y$. Искомое число A есть частное значение функции z при $x=1{,}03$ и $y=2{,}04$. Выберем за точку P_1 (1, 2), тогда $\Delta x=1{,}03-1=0{,}03$ и $\Delta y=2{,}04-$

Градиент.

$-2=0{,}04$. Вычислим значение полного дифференциала dz в точке P_1 (1, 2).

$$dz=y\cdot x^{y-1}\cdot\Delta x+x^y\ln x\ \Delta y;\ [dz]_{P_1}=2\cdot1\cdot0{,}03+1\cdot0\cdot0{,}04=0{,}06.$$

Следовательно,

$$z(1{,}03,\ 2{,}04)\approx z(1,2)+0{,}06=1+0{,}06=1{,}06.$$

Таким образом, $A\approx1{,}06$.

61. Вычислить приближенно число

$$B=\ln[(3{,}02)^2-6\sqrt[3]{0{,}96}-2].$$

Решение. Рассмотрим функцию $z=\ln(x^2-6\sqrt[3]{y}-2)$. Искомое число B есть частное значение функции z при $x=3{,}02$ и $y=0{,}96$. Так как значение функции легко находится при $x=3$ и $y=1$, то выберем за точку $P_1(3,1)$. В этом случае $\Delta x=3{,}02-3=0{,}02$ и $\Delta y=0{,}96-1=-0{,}04$.

Вычислим значение функции z в точке $P_1(3,\ 1)$.

$$z(3,1)=\ln\ (9-6-2)=\ln 1=0.$$

Вычислим теперь значение полного дифференциала dz в точке P_1.

$$dz=\frac{2x\cdot\Delta x-\dfrac{2}{\sqrt[3]{y^2}}\cdot\Delta y}{x^2-6\sqrt[3]{y}-2},$$

$$[dz]_{P_1}=\frac{6\cdot0{,}02-2\cdot(-0{,}04)}{9-6-1}=0{,}2.$$

Следовательно, $B=z(3{,}02;\ 0{,}96)\approx0+0{,}2=0{,}2$.

62. Высота цилиндра $H=25$ *мм*, а радиус основания $R=10$ *мм*. Как изменится объем цилиндра, если радиус увеличить на 2 *мм*, а высоту уменьшить на 2 *мм*?

Решение. Объем цилиндра $V=\pi R^2H$. По условию приращение радиуса $\Delta R=2$ *мм*, а приращение высоты $\Delta H=-2$ *мм*. Изменение объема равно полному приращению ΔV. Приближенно изменение объема будет равно полному дифференциалу dV.

$$dV=2\pi RH\ \Delta R+\pi R^2\ \Delta H.$$

При $R=10$ *мм* и $H=25$ *мм* получаем

$$dV=2\pi\cdot 10\cdot 25\cdot 2+100\pi\cdot(-2)=800\pi \text{ мм}^3=0{,}8\ \pi \text{ см}^3.$$

Таким образом, объем цилиндра увеличится приближенно на $0{,}8\pi$ *см*^{3} или на $2{,}5$ *см*^{3}.

63. Пользуясь формулой (3), вычислить приближенно числа:

$$A=(1{,}02)^3\cdot(0{,}97)^2;\qquad B=(1{,}04)^{2{,}02};\quad C=\sqrt{(4{,}05)^2+(2{,}93)^2};$$

$$D=\sin 32^\circ\cdot\cos 59^\circ;\ E=\ln(\sqrt[3]{0{,}97}+\sqrt[5]{1{,}02}-1).$$

64. При деформации цилиндра его радиус R увеличился с 20 *см* до 20,5 *см*, а высота H уменьшилась с 1 *м* до 98 *см*. Найти приближенно изменение объема цилиндра.

65. При деформации конуса его радиус R увеличился с 30 *см* до 30,1 см, а высота H уменьшилась с 60 *см* до 59,5 *см*. Найти приближенно изменение объема конуса, заменяя приращение дифференциалом.

66. Вычислить приближенно число

$$N=(1{,}08)^{2{,}02}+\cos\left(\frac{\pi}{6}-0{,}03\right).$$

Решение. Рассмотрим функцию трех независимых переменных

$$u=x^y+\cos z.$$

Искомое число N есть частное значение функции u при $x=1{,}08$, $y=2{,}02$ и $z=\frac{\pi}{6}-0{,}03$.

Вычислим значение функции u при $x=1$, $y=2$ и $z=\frac{\pi}{6}$, то есть в точке $M_1(1, 2, \frac{\pi}{6})$ и значение полного дифференциала в этой точке.

$$u\left(1{,}2, \frac{\pi}{6}\right)=1^2+\cos\frac{\pi}{6}=1+\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$du=y\cdot x^{y-1}\cdot\Delta x+x^y\ \ln x\cdot\Delta y-\sin z\cdot\Delta z.$$

Так как $\Delta x=0{,}08$, $\Delta y=0{,}02$ и $\Delta z=-0{,}03$, то

$$[du]_{M_1}=2\cdot 1\cdot 0{,}08+0-\frac{1}{2}\cdot(-0{,}03)=0{,}175.$$

Следовательно,

$$N \approx 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + 0{,}175 \approx 2{,}041.$$

67. Вычислить приближенно числа:

$$A = (1{,}02)^{2{,}03} + \sin\left(\frac{\pi}{4} + 0{,}02\right),$$

$$B = (1{,}05)^{2{,}01} + \cos\left(\frac{\pi}{3} - 0{,}02\right).$$

68. В усеченном конусе радиус нижнего основания $R = 20$ *см*, радиус верхнего основания $r = 10$ *см*, а высота $h = 30$ *см*. Как изменится объем конуса, если радиус R увеличить на 4 *мм*, радиус r уменьшить на 2 *мм*, а высоту h уменьшить на 3 *мм*?

Решение. Известно, что объем усеченного конуса вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{3}\pi h (R^2 + r^2 + Rr).$$

Изменение объема конуса равно полному приращению ΔV, которое заменим полным дифференциалом dV.

$$dV = \frac{\partial V}{\partial R}\Delta R + \frac{\partial V}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial V}{\partial h}\Delta h.$$

$$dV = \frac{1}{3}\pi h (2R + r)\cdot\Delta R + \frac{1}{3}\pi h (2r + R)\cdot\Delta r + \frac{1}{3}\pi (R^2 + r^2 + Rr)\Delta h.$$

По условию $\Delta R = 0{,}4$ *см*, $\Delta r = -0{,}2$ *см*, $\Delta h = -0{,}3$ *см*.

Следовательно,

$$dV = \frac{1}{3}\pi\cdot 30\,(40 + 10)\cdot 0{,}4 + \frac{1}{3}\pi\cdot 30(20 + 20)\cdot(-0{,}2) +$$

$$+ \frac{1}{3}\pi(400 + 100 + 200)\cdot(-0{,}3) = \frac{\pi}{3}(600 - 240 - 210) = 50\pi \text{ см}^3.$$

Таким образом, объем конуса увеличится приближенно на 50π *см*^{3}, то есть на 157 *см*^{3}.

69. В усеченном конусе радиус нижнего основания $R = 30$ *см*, радиус верхнего основания $r = 20$ *см*, высота $h = 40$ *см*. Как изменится объем конуса, если радиус R увеличить на 3 *мм*, радиус r увеличить на 4 *мм*, а высоту h увеличить на 2 *мм*.