

- 1.2.123*. Дана квадратная матрица n -го порядка $A = (a_{ij})$. Чему равна сумма $a_{11} \cdot A_{21} + a_{12} \cdot A_{22} + \dots + a_{1n-1} \cdot A_{2n-1} + a_{1n} \cdot A_{2n}$?
- 1.2.124*. Доказать, что если все элементы определителя 3-го порядка равны 1, то значение определителя — четное число.
- 1.2.125*. Доказать, что если числа a, b, c — действительные, то уравнение $\begin{vmatrix} a-x & b \\ b & c-x \end{vmatrix} = 0$ имеет действительные корни.
- 1.2.126*. Числа 255, 391, 578 делятся на 17. Не вычисляя значение определителя $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 3 & 9 & 1 \\ 5 & 7 & 8 \end{vmatrix}$, доказать, что он тоже делится на 17.
- 1.2.127*. Как изменится сумма всех алгебраических дополнений к элементам матрицы, если ко всем элементам матрицы прибавить одно и то же число?
- 1.2.128*. Вычислить определитель n -го порядка методом рекуррентных соотношений:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

§ 3. РАНГ МАТРИЦЫ

⇒ *Минором k -го порядка* произвольной матрицы A называется определитель, составленный из элементов матрицы, расположенных на пересечении каких-либо k строк и k столбцов.

В матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 4 \\ 7 & 8 & 9 & -7 \end{pmatrix}$ можно указать, например, такие миноры:

— 2-го порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \left(\text{минор} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \right), \quad \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 7 & -7 \end{vmatrix} \left(\text{минор} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{24} \\ a_{31} & a_{34} \end{vmatrix} \right), \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} \left(\text{минор} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \right);$$

— 3-го порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & -7 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 4 \\ 8 & 9 & -7 \end{vmatrix};$$

— 1-го порядка

$$|2| \text{ (минор } |a_{12}|), |3| \text{ (минор } |a_{13}|), |-7| \text{ (минор } |a_{34}|).$$

⇒ Рангом матрицы A называется наибольший из порядков ее миноров, не равных нулю.

Обозначения: $r(A)$, $\text{rang}(A)$.

⇒ Базисным минором называется любой из отличных от нуля миноров матрицы A , порядок которого равен $r(A)$.

Для следующей матрицы A ее ранг равен 1:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad r(A) = 1.$$

Любой из миноров 2-го порядка матрицы A равен нулю, и существует хотя бы один минор 1-го порядка, не равный нулю, например, $|3| = 3$. Базисным минором матрицы A является каждый из ненулевых миноров 1-го порядка: $|3| (= 3)$, $|-2| (= -2)$, $|2| (= 2)$.

Для следующей матрицы A ее ранг равен 2:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad r(A) = 2,$$

так как существует минор 2-го порядка $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6$, не равный нулю, а миноров 3-го порядка у матрицы A нет. Единственный базисный минор матрицы A — минор $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$.

Теорема 1.1. При элементарных преобразованиях ранг матрицы не изменяется.

Теорема 1.2. Ранг ступенчатой матрицы равен количеству ее ненулевых строк.

Метод элементарных преобразований нахождения ранга матрицы заключается в том, что матрицу A приводят к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований; количество ненулевых строк полученной ступенчатой матрицы есть искомым ранг матрицы A .

Метод окаймляющих миноров нахождения ранга матрицы A состоит в следующем. Необходимо:

1) Найти какой-нибудь минор M_1 первого порядка (т. е. элемент матрицы), отличный от нуля. Если такого минора нет, то матрица A нулевая и $r(A) = 0$.

2) Вычислять миноры 2-го порядка, содержащие M_1 (окаймляющие M_1) до тех пор, пока не найдется минор M_2 , отличный от нуля. Если такого минора нет, то $r(A) = 1$, если есть, то $r(A) \geq 2$. И т. д.

...

к) Вычислять (если они существуют) миноры k -го порядка, окаймляющие минор $M_{k-1} \neq 0$. Если таких миноров нет, или они все равны нулю, то $r(A) = k - 1$; если есть хотя бы один такой минор $M_k \neq 0$, то $r(A) \geq k$, и процесс продолжается.

При нахождении ранга матрицы таким способом достаточно на каждом шаге найти *всего один* ненулевой минор k -го порядка, причем искать его только среди миноров, содержащих минор $M_{k-1} \neq 0$.

1.3.1. Найти ранг матрицы методом элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

○ Приведем матрицу к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 \cdot \text{II} - \text{I} \\ 2 \cdot \text{III} - \text{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -9 & -3 & -12 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \text{III} + 3 \cdot \text{II} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полученная ступенчатая матрица содержит две ненулевые строки, значит ее ранг равен 2. Следовательно, ранг исходной матрицы также равен 2. ●

Найти ранг матрицы методом элементарных преобразований:

1.3.2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$

1.3.3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 & 6 & 11 \\ 1 & -1 & -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$

1.3.4. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -7 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 6 & -4 \\ -1 & 2 & -1 & -10 & 5 \end{pmatrix}.$

1.3.5. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -7 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 6 & -4 \\ -1 & 2 & -1 & -10 & 5 \\ 2 & -1 & 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$

$$1.3.6. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{pmatrix}.$$

$$1.3.7. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.3.8. Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров и указать один из базисных миноров:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

○ Так как у матрицы A есть ненулевые элементы, то $r(A) \geq 1$. Найдем какой-либо ненулевой минор 2-го порядка (если он существует). Таким минором является, например, $M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$. Значит, $r(A) \geq 2$.

Вычислим миноры 3-го порядка, окаймляющие M_2 :

$$M_3^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \left[\begin{array}{l} \text{разложение} \\ \text{по 2-й строке} \end{array} \right] = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{aligned} M_3^{(2)} &= \begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \left[\begin{array}{l} \text{разложение} \\ \text{по 1-му столбцу} \end{array} \right] = \\ &= 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2 - 2) + 6 \cdot (6 - 4) = -12 + 12 = 0; \end{aligned}$$

Все миноры 3-го порядка, окаймляющие M_2 , равны нулю, следовательно, $r(A) < 3$. Итак, $r(A) = 2$.

Одним из базисных миноров является $M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$. ●

Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров и указать какой-либо базисный минор:

$$1.3.9. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$1.3.10. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 11 \end{pmatrix}.$$

$$1.3.11. \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & 2 \\ 5 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$1.3.12. \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & 3 \\ 5 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$1.3.13. \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$1.3.14. \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти ранг матрицы при различных значениях параметра λ :

$$1.3.15. \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

$$1.3.16. \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Дополнительные задачи

Найти ранг матрицы методом элементарных преобразований:

$$1.3.17. \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -14 & 22 \\ -2 & 1 & 3 & 3 & -9 \\ -4 & -3 & 11 & -19 & 17 \end{pmatrix}.$$

$$1.3.18. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 3 & 8 & 2 & -19 \end{pmatrix}.$$

$$1.3.19. \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$1.3.20. \begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}.$$

$$1.3.21. \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$1.3.22. \begin{pmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50 \\ 25 & -7 & 32 & -18 & -11 \\ 31 & 12 & 19 & -43 & -55 \\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \end{pmatrix}.$$

Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров и указать один из базисных миноров:

$$1.3.23. \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$1.3.24. \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$1.3.25. \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$1.3.26. \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$1.3.27. \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$1.3.28. \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Найти ранг матрицы при различных значениях параметра λ :

$$1.3.29. \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & -1 & \lambda \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$1.3.30. \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$