§ 8. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Пусть $z=f(x, y)$ — функция двух переменных x и y, каждая из которых, в свою очередь, является функцией независимой переменной t, то есть $x=\varphi(t)$ и $y=g(t)$. Тогда $z=f[\varphi(t), g(t)]$ есть сложная функция от независимой переменной t.

Если функции $\varphi(t)$ и $g(t)$ дифференцируемы в точке t, а функция $z=f(x, y)$ дифференцируема в точке (x, y), то сложная функция $z=f[\varphi(t), g(t)]$ также дифференцируема в точке t и ее производная $\frac{dz}{dt}$ находится по формуле

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}. \tag{1}$$

Аналогично, если $u=f(x, y, z)$ — функция трех переменных x, y и z, каждая из которых, в свою очередь, является функцией одной и той же независимой переменной t, то производная $\frac{du}{dt}$ находится по формуле

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}. \tag{2}$$

70. $z=x^2e^y$; $x=\sin t$, $y=t^3$; найти $\frac{dz}{dt}$.

Решение. Применяем формулу (1).

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xe^y; \quad \frac{dx}{dt}=\cos t; \quad \frac{\partial z}{\partial y}=x^2e^y; \quad \frac{dy}{dt}=3t^2.$$

Следовательно,

$$\frac{dz}{dt}=2x\,e^y\cos t+x^2e^y\,3t^2$$

или

$$\frac{dz}{dt}=2\sin t\,e^{t^3}\cos t+\sin^2 t\,e^{t^3}\,3t^2=e^{t^3}(\sin 2t+3t^2\sin^2 t).$$

Заметим, что производную $\frac{dz}{dt}$ можно получить другим способом: сначала выразить функцию z явно через t и затем дифференцировать по t.

71. $u=\ln(x^2+y^3)-3z$; найти $\frac{du}{dt}$, если $x=t^3$, $y=t^2$ и $z=e^t$.

Решение. Применяя формулу (2), имеем:

$$\frac{du}{dt}=\frac{2x}{x^2+y^3}3t^2+\frac{3y^2}{x^2+y^3}2t-3e^t.$$

Заменяя теперь x, y и z их выражениями через t, получим:

$$\frac{du}{dt}=\frac{6t^5}{t^6+t^6}+\frac{6t^5}{t^6+t^6}-3e^t=\frac{6}{t}-3e^t.$$

72. $z=x^2+xy+y^2$; найти $\frac{dz}{dt}$, если $x=t^2$, $y=t$.

73. $z=\ln(x^2+y^2)$; найти $\frac{dz}{dt}$, если $x=\frac{1}{t}$, $y=\sqrt{t+1}$.

74. $z=e^{3x+2y}$; найти $\frac{dz}{dt}$, если $x=\cos t$, $y=t^2$.

75. $u=x^2\sqrt{y^2+z^2}$; найти $\frac{du}{dt}$, если $x=t^2$, $y=\sin t$, $z=\cos t$.

Если в формуле (1) положить $t=x$, то получим:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}. \tag{3}$$

Формула (3) может быть использована в том случае, когда функция $z=f(x, y)$ является функцией двух переменных, одна из которых — x — является независимой переменной, а другая — y — зависит от переменной x.

Аналогично, при $t=x$ формула (2) принимает вид:

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dx}. \tag{4}$$

Формула (4) используется в том случае, когда дана функция $u=f(x, y, z)$ и переменные y и z зависят от переменной x. Производная $\frac{dz}{dx}$ называется *полной* производной функции z по переменной x. Производная $\frac{du}{dx}$, найденная по формуле (4), называется *полной* производной функции u по x.

76. Найти полную производную $\frac{dz}{dx}$, если $z=e^{xy}$, а $y=\sin x$.

Решение. Применяем формулу (3).

$$\frac{\partial z}{\partial x}-y\,e^{xy};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x\,e^{xy};\quad \frac{dy}{dx}=\cos x,$$

$$\frac{dz}{dx}=y\,e^{xy}+x\,e^{xy}\cos x=e^{xy}\,(y+x\cos x)=e^{x\sin x}(\sin x+x\cos x).$$

77. Найти полную производную $\frac{du}{dx}$, если $u=e^{3x}(y-z)$, $y=3\sin x$, $z=\cos x$.

Решение. Применяем (4). $\frac{\partial u}{\partial x}=3e^{3x}(y-z)$; $\frac{\partial u}{\partial y}=e^{3x}$; $\frac{\partial u}{\partial z}=-e^{3x}$; $\frac{dy}{dx}=3\cos x$; $\frac{dz}{dx}=-\sin x$. Следовательно,

$$\frac{du}{dx}=3e^{3x}(y-z)+e^{3x}3\cos x-e^{3x}\cdot(-\sin x)=$$

$$=e^{3x}(3y-3z+3\cos x+\sin x)=$$

$$=e^{3x}(9\sin x-3\cos x+3\cos x+\sin x)=10e^{3x}\sin x.$$

Заметим, что полную производную можно получить, если предварительно выразить заданную функцию через x и затем дифференцировать по x.

78. Найти полную производную $\frac{dz}{dx}$: а) $z=x^2y$; $y=\sin x$; б) $z=\operatorname{arc\,tg}(xy)$; $y=e^x$; в) $z=\arcsin\frac{x}{y}$; $y=\sqrt{x^2+1}$.

79. Найти полную производную $\frac{du}{dx}$, если

$$u=\ln(3x+2y^2-z);\ y=\sqrt{x};\ z=e^x.$$

Рассмотрим дифференцирование сложной функции от двух независимых переменных. Пусть $z=f(u,v)$ — есть функция двух переменных u и v, каждая из которых в свою очередь является функцией двух независимых переменных x и y. В этом случае частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ вычисляются по формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{6}$$

80. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если

$z = u \ln v$; $u = x^2 y$; $v = \frac{x}{y}$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \ln v; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u}{v}; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 2\,xy; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{y}.$$

Подставляя в (5), получим $\frac{\partial z}{\partial x} = \ln v \cdot 2xy + \frac{u}{v} \cdot \frac{1}{y}$.

Заменяя теперь u и v их выражениями через x и y, получим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy \ln \frac{x}{y} + \frac{x^2 y}{x} \cdot \frac{1}{y} = xy \left(2 \ln \frac{x}{y} + 1\right).$$

Находим $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial v}{dy}$ и подставляем в (6).

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \ln v \cdot x^2 + \frac{u}{v} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = x^2 \ln \frac{x}{y} + xy^2 \left(-\frac{x}{y^2}\right) =$$

$$= x^2 \left(\ln \frac{x}{y} - 1\right).$$

81. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если

$$z = \ln(u^2 + v^2), \; u = x \cos y, \; v = y \sin x.$$

§ 9. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ

Пусть переменные x и y связаны уравнением

$$F(x, y) = 0. \tag{1}$$

Если для каждого значения x из некоторого промежутка существует такое значение y, при котором имеет место (1), то функция y называется неявной функцией от x. Продифференцируем обе части равенства (1) по x.

Производная $\frac{dF}{dx}$ находится по формуле (3) из § 8:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx};$$