1.3.46*. Доказать, что любую матрицу ранга r можно представить в виде суммы r матриц ранга 1, но нельзя представить в виде суммы менее, чем r таких матриц.

1.3.47*. Найти ранг матрицы размера $n \times n$

$$\begin{pmatrix} 1-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-n \end{pmatrix}.$$

§ 4. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА. МАТРИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ

$\Rrightarrow$ *Обратной матрицей* к квадратной матрице A называется такая матрица (обозначается A^{-1}), что $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$.

Замечание. Если матрица A^{-1} существует, то она единственна.

$\Rrightarrow$ *Присоединенной матрицей* к квадратной матрице $A = (a_{ij})$ называется матрица $\widetilde{A} = (A_{ij})^T$, полученная транспонированием из матрицы, составленной из алгебраических дополнений A_{ij} к элементам a_{ij}.

Теорема 1.3. Если квадратная матрица A — невырожденная (т. е. $\det A \neq 0$), то

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widetilde{A}. \tag{4.1}$$

Метод присоединенной матрицы вычисления обратной матрицы к невырожденной матрице A состоит в применении формулы (4.1).

Метод элементарных преобразований (метод Гаусса) вычисления обратной матрицы к невырожденной матрице A состоит в следующем. Приписывая справа к матрице A размера $n \times n$ единичную матрицу размера $n \times n$, получим прямоугольную матрицу $\Gamma = (A|E)$ размера $n \times 2n$. С помощью элементарных преобразований над строками матрицы Γ сначала приведем ее к ступенчатому виду $\Gamma_1 = (A_1|B)$, где матрица A_1 — треугольная, а затем к виду $\Gamma_2 = (E|A^{-1})$.

Матричные уравнения простейшего вида с неизвестной матрицей X записываются следующим образом

$$AX = B, \tag{4.2}$$

$$XA = B, \tag{4.3}$$

$$AXC = B. \tag{4.4}$$

В этих уравнениях A, B, C, X — матрицы таких размеров, что все используемые операции умножения возможны, и с обеих сторон от знаков равенства находятся матрицы одинаковых размеров.

Если в уравнениях (4.2), (4.3) матрица A невырожденная, то их решения записываются следующим образом:

$$X = A^{-1}B,$$
$$X = BA^{-1}.$$

Если в уравнении (4.4) матрицы A и C невырождены, то его решение записывается так:

$$X = A^{-1}BC^{-1}.$$

1.4.1. Найти (методом присоединенной матрицы) матрицу, обратную к данной:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

○ 1) Найдем $\det A$:

$$\det A = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} =$$
$$= -48 - 2 \cdot (-42) + 3 \cdot (32 - 35) = -48 + 84 - 9 = 27 \neq 0.$$

Так как $\det A \neq 0$, то матрица A^{-1} существует.

2) Найдем алгебраические дополнения ко всем элементам матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 5 \cdot 0 - 6 \cdot 8 = -48;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -(4 \cdot 0 - 6 \cdot 7) = 42;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 4 \cdot 8 - 5 \cdot 7 = -3;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 24; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -21;$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3.$$

3) Запишем матрицу $\widetilde{A} = (A_{ij})^T = \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$

4) Найдем матрицу A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\cdot\widetilde{A} = \frac{1}{27}\cdot\begin{pmatrix}-48 & 24 & -3\\ 42 & -21 & 6\\ -3 & 6 & -3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{16}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9}\\ \frac{14}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{2}{9}\\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9}\end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку:

$$A^{-1}\cdot A = \begin{pmatrix}-\frac{16}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9}\\ \frac{14}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{2}{9}\\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix};$$

$$A\cdot A^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{16}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9}\\ \frac{14}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{2}{9}\\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \quad ●$$

Найти обратную матрицу методом присоединенной матрицы:

1.4.2. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

1.4.3. $\begin{pmatrix}1/3 & 2/3 & 2/3\\ 2/3 & 1/3 & -2/3\\ 2/3 & -2/3 & 1/3\end{pmatrix}$.

1.4.4. $\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 3 & 2 & -4\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

1.4.5. $\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\end{pmatrix}$.

1.4.6. $\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

1.4.7. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$.

1.4.8. $\begin{pmatrix}5 & 3 & 1\\ 1 & -3 & -2\\ -5 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

1.4.9. Найти матрицу, обратную к матрице $A = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$.

◐ 1) Найдем $\det A = \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Матрица A^{-1} существует, только если $\det A \neq 0$.

2) Найдем алгебраические дополнения к элементам матрицы A:

$$A_{11} = a_{22}, \quad A_{12} = -a_{21}, \quad A_{21} = -a_{12}; \quad A_{22} = a_{11}.$$

3) Запишем присоединенную матрицу:

$$\widetilde{A} = (A_{ij})^T = \begin{pmatrix}a_{22} & -a_{12}\\ -a_{21} & a_{11}\end{pmatrix}.$$

Итак, для матрицы 2-го порядка присоединенная матрица находится очень просто — элементы главной диагонали меняются местами, а элементы побочной диагонали умножаются на (-1):

$$A = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} \Longrightarrow \widetilde{A} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{a_{22}} & -a_{12}\\ -a_{21} & \boldsymbol{a_{11}}\end{pmatrix}.$$

4) Найдем обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \widetilde{A} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}. \qquad \bullet$$

Найти обратную матрицу, используя результаты задачи 1.4.9:

1.4.10. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. **1.4.11.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1.4.12. $\begin{pmatrix} x & z \\ y & -x \end{pmatrix}$. **1.4.13.** $\begin{pmatrix} a & -b \\ -a & b \end{pmatrix}$.

1.4.14. Найти (методом элементарных преобразований) матрицу, обратную к данной:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

◐ Записывая матрицу $\Gamma = (A|E)$ размера (3×6), с помощью элементарных преобразований над строками приведем ее сначала к ступенчатому виду $\Gamma_1 = (A_1|B)$, а затем к виду $\Gamma_2 = (E|A^{-1})$:

$$\Gamma = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mathrm{II} - \mathrm{I} \\ \mathrm{III} - 2 \cdot \mathrm{I} \end{array} \sim$$

$$\sim \Gamma_1 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \mathrm{II} + \mathrm{III} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{III} : 2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1/2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathrm{I} - \mathrm{II} - \mathrm{III} \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -1 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1/2 \end{array}\right) = \Gamma_2.$$

Итак, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3/2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Сделаем проверку:

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3/2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}5&-1&-3/2\\-3&1&1\\-1&0&1/2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&-1\\2&2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}. \quad\bullet$$

Найти обратную матрицу методом элементарных преобразований:

1.4.15. $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$. **1.4.16.** $\begin{pmatrix}1&1&1\\-2&-1&-2\\2&3&3\end{pmatrix}$.

1.4.17. $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&6&4\\3&10&8\end{pmatrix}$. **1.4.18.** $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&6&4\\-4&-14&-6\end{pmatrix}$.

1.4.19. $\begin{pmatrix}1&2&-3&4\\5&6&7&-2\\-1&0&1&2\\3&4&5&6\end{pmatrix}$. **1.4.20.** $\begin{pmatrix}1&2&3&-2&4\\2&6&2&1&0\\3&0&-1&1&2\\-1&4&0&5&-4\\5&-4&-1&-1&8\end{pmatrix}$.

1.4.21. Методом элементарных преобразований найти матрицу, обратную к данной матрице размера $n\times n$:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&\dots&1\\1&0&1&\dots&1\\1&1&0&\dots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&1&\dots&0\end{pmatrix}.$$

❍ $$\Gamma=(A|E)=\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}1&1&1&\dots&1&1&0&0&\dots&0\\1&0&1&\dots&1&0&1&0&\dots&0\\1&1&0&\dots&1&0&0&1&\dots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&1&\dots&0&0&0&0&\dots&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\\mathrm{II}-\mathrm{I}\\\mathrm{III}-\mathrm{I}\\\vdots\\(\mathrm{n})-\mathrm{I}\end{array}\sim$$

$$\sim\Gamma_1=\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}1&1&1&\dots&1&1&0&0&\dots&0\\0&-1&0&\dots&0&-1&1&0&\dots&0\\0&0&-1&\dots&0&-1&0&1&\dots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\dots&-1&-1&0&0&\dots&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\mathrm{I}+\mathrm{II}+\ldots+(\mathrm{n})\\\\\\\\\\\end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}1&0&0&\dots&0&2-n&1&1&\dots&1\\0&-1&0&\dots&0&-1&1&0&\dots&0\\0&0&-1&\dots&0&-1&0&1&\dots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\dots&-1&-1&0&0&\dots&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\\mathrm{II}\cdot(-1)\\\mathrm{III}\cdot(-1)\\\vdots\\(\mathrm{n})\cdot(-1)\end{array}\sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 2-n & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 1 & 0 & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & -1 \end{array}\right) = \Gamma_2 = (E|A^{-1}).$$

$$\text{Итак, } A^{-1} = \begin{pmatrix} 2-n & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & -1 \end{pmatrix}.$$ ●

Найти матрицу, обратную к данной матрице размера $n \times n$, используя метод элементарных преобразований:

1.4.22. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **1.4.23.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$.

1.4.24. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$. **1.4.25.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$.

1.4.26. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.4.27. Решить матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

❍ Запишем данное матричное уравнение в виде $AX = B$. Его решением является матрица $X = A^{-1}B$ (если существует матрица A^{-1}).

1) Найдем определитель матрицы A:

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Значит, обратная матрица A^{-1} существует, и исходное уравнение имеет (единственное) решение.

2) Найдем обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \widetilde{A} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) Найдем матрицу

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$ ●

1.4.28. Найти матрицу X, удовлетворяющую уравнению:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

❍ Запишем данное матричное уравнение в виде $AXC = B$. Его решением является матрица $X = A^{-1}BC^{-1}$ (если матрицы A^{-1} и C^{-1} существуют).

1) Найдем определители матриц A и C:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0, \quad \det C = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Матрицы A и C невырождены, значит, существуют обратные матрицы A^{-1} и C^{-1}, и исходное уравнение имеет (единственное) решение.

2) Найдем обратные матрицы A^{-1} и C^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \widetilde{A} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix};$$

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C} \cdot \widetilde{C} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

3) Найдем матрицу

$$X = A^{-1}BC^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$ ●

Решить матричные уравнения:

1.4.29. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$

1.4.30. $X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$

1.4.31. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$

1.4.32. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$

1.4.33. $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$

1.4.34. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}.$

1.4.35. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}.$

1.4.36. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$

Дополнительные задачи

Найти (методом присоединенной матрицы) матрицу, обратную к данной:

1.4.37. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}.$

1.4.38. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -6 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$

1.4.39. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$

1.4.40. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -4 & -3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$

1.4.41. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$

1.4.42. $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$

Найти (методом элементарных преобразований) матрицу, обратную к данной:

1.4.43. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

1.4.44. $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$

1.4.45. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 6 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$

1.4.46. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 \end{pmatrix}$ (размер $n \times n$).

1.4.47. $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & \dots & a^n \\ 0 & 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & a & \dots & a^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ (размер $(n+1) \times (n+1)$).

1.4.48. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.4.49. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ (размер $n \times n$).

Решить матричное уравнение:

1.4.50. $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.4.51. $X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.4.52. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1.4.53. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1.4.54. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1.4.55. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1.4.56. $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4 – 2361

1.4.57. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1.4.58. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$.

Контрольные вопросы и более сложные задачи

1.4.59. Если матрица A не квадратная, может ли существовать такая матрица B, что:
а) $BA = E$?
б) $AB = E$?

1.4.60. Доказать, что если для квадратной матрицы A найдутся две такие матрицы B и C, что $BA = AC = E$, то $B = C$.

1.4.61. Верно ли, что:
а) $(2A)^{-1} = 0{,}5 \cdot A^{-1}$ $\left(\text{аналог числового равенства } \frac{1}{2a} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a}\right)$?
б) $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$?
в) $(-E)^{-1} = -E$ $\left(\text{аналог: } \frac{1}{-1} = -1\right)$?
г) $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ $\left(\text{аналог: } \frac{1}{ab} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}\right)$?
д) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$?
е) $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$ $\left(\text{аналог: } \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a}\right)$?

1.4.62. Верно ли, что:
а) если $|A| = 0$, то $|A^{-1}| = 0$?
б) если $|A| = 2$, то $|A^{-1}| = -2$?
в) если $|A| = 2$, то $|A^{-1}| = 0{,}5$?
г) $|A| \cdot |A^{-1}| = 1$?

1.4.63. Верно ли, что матрица A^{-1} имеет те же размеры, что и матрица A?

1.4.64. Следует ли второе утверждение из первого (если матрицы A и B произвольные):
а) $AB = E$; $BA = E$?
б) $AB = 2E$; $BA = 2E$?
в) $A \cdot A = E$; $A = E$ или $A = -E$?

1.4.65. Следует ли второе утверждение из первого (если матрицы A и B квадратные):
а) $AB = E$; $BA = E$?
б) $AB = 2E$; $BA = 2E$?

1.4.66. Может ли матричное уравнение $AX = B$ иметь:
а) одно решение?
б) два решения?

в) 17 решений?

г) ни одного решения?

1.4.67. Равносильны ли уравнения:

а) $AX = B$ и $X = A^{-1}B$?

б) $AX = B$ и $X = BA^{-1}$?

в) $AX = B$ и $X = AB^{-1}$?

г) $AX = B$ и $X = B^{-1}A$?

1.4.68. Как изменится матрица A^{-1}, если в матрице A:

а) поменять местами i-ю и j-ю строки (i-й и j-й столбцы)?

б) i-ю строку (столбец) умножить на число $\lambda \neq 0$?

в) к i-й строке (столбцу) прибавить j-ю строку (столбец), умноженную на число λ?

1.4.69. Доказать, что матричное уравнение $A \cdot X = 0$ (матрица A — квадратная) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда $|A| = 0$.

1.4.70. Квадратная матрица $A = (a_{ij})$ называется *симметричной*, если $a_{ij} = a_{ji}$ $(\forall i, j)$. Доказать, что матрица, обратная к симметричной, будет симметричной.

1.4.71. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 0 & 1 & 2 & \ldots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

1.4.72. Доказать, что если для квадратной матрицы A при некотором натуральном k выполнено равенство $A^k = 0$, то

$$(E - A)^{-1} = E + A + \ldots + A^{k-1}.$$

1.4.73. Найти матрицу, обратную к матрице $\begin{pmatrix} E_k & A \\ 0 & E_l \end{pmatrix}$ размера $(k + l) \times (k + l)$, где E_k и E_l — единичные матрицы размеров $k \times k$ и $l \times l$ соответственно, A — произвольная матрица размера $k \times l$.

1.4.74. Пусть размеры матриц A, B, C таковы, что можно составить матрицу $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, и существуют матрицы A^{-1} и C^{-1}. Доказать, что

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}.$$

1.4.75. Доказать, что если матрица A_1 получается из матрицы A поворотом на $90°$, то обратная матрица A_1^{-1} получается из матрицы A^{-1} поворотом на $90°$ в обратном направлении.

1.4.76*. Доказать, что любая $(m \times n)$-матрица A ранга r может быть представлена в виде произведения $A = A_1 \cdot E_r \cdot A_2$, где матрицы