80. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z=u\ln v;\ u=x^2y;\quad v=\frac{x}{y}$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\ln v;\quad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{u}{v};\quad \frac{\partial u}{\partial x}=2\,xy;\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{y}.$$

Подставляя в (5), получим $\frac{\partial z}{\partial x}=\ln v\cdot 2xy+\frac{u}{v}\cdot\frac{1}{y}$.

Заменяя теперь u и v их выражениями через x и y, получим:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xy\ln\frac{x}{y}+\frac{x^2y}{x}\cdot\frac{1}{y}=xy\left(2\ln\frac{x}{y}+1\right).$$

Находим $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial v}{dy}$ и подставляем в (6).

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\ln v\cdot x^2+\frac{u}{v}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=x^2\ln\frac{x}{y}+xy^2\left(-\frac{x}{y^2}\right)=$$

$$=x^2\left(\ln\frac{x}{y}-1\right).$$

81. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если

$$z=\ln(u^2+v^2),\ u=x\cos y,\ v=y\sin x.$$

§ 9. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ

Пусть переменные x и y связаны уравнением

$$F(x, y)=0. \tag{1}$$

Если для каждого значения x из некоторого промежутка существует такое значение y, при котором имеет место (1), то функция y называется неявной функцией от x. Продифференцируем обе части равенства (1) по x.

Производная $\frac{dF}{dx}$ находится по формуле (3) из § 8:

$$\frac{dF}{dx}=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx};$$

так как производная правой части (1) равна нулю, то имеем:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0.$$

Решим последнее равенство относительно $\frac{dy}{dx}$, полагая, что $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$.

Имеем:
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F_x'}{F_y'}. \qquad (2)$$

Формула (2) выражает правило дифференцирования неявной функции y от переменной x.

82. Функция $y(x)$ задана уравнением

$$2x^2+y^2-xy+6y-3x+1=0; \text{ найти } \frac{dy}{dx}.$$

Решение. По условию имеем:

$$F(x, y) = 2x^2+y^2-xy+6y-3x+1.$$

Находим частные производные $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 4x-y-3; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y-x+6.$$

Применяя формулу (2), получим:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4x-y-3}{2y-x+6}.$$

83. Неявная функция $y(x)$ задана уравнением

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y} - \ln y = 0; \text{ найти } \frac{dy}{dx}.$$

Решение. Полагая $F(x, y) = \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y} - \ln y$, находим $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}$;

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{y^2+x^2};$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)-\frac{1}{y}=-\frac{x}{y^2+x^2}-\frac{1}{y}=$$

$$=-\frac{xy+y^2+x^2}{y(y^2+x^2)}.$$

Подставив найденные производные в (2), получим:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{x^2+xy+y^2}.$$

84. Найти производную $\frac{dy}{dx}$, если неявная функция $y(x)$ задана уравнением:

а) $x^2+y^2-4x+6y=0$; б) $xy-\ln y=0$;

в) $y\,e^x+e^y=0$; г) $x\,e^y-\sin\frac{y}{x}=0$;

д) $\arcsin\frac{x}{y}-\ln y=0$; е) $\cos(x-y)+y\sin x=0$.

Пусть переменные x, y и z связаны уравнением

$$F(x, y, z)=0. \tag{3}$$

Если каждой паре значений x и y из некоторой области соответствует одно или несколько значений z, удовлетворяющих уравнению (3), то функция z — неявная функция от x и y.

Частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ неявной функции z могут быть найдены, если применить формулу (2).

Считая y постоянной, находим: $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}. \tag{4}$$

Считая x постоянной, находим: $$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}. \tag{5}$$

В формулах (4) и (5), которые позволяют находить частные производные неявно заданной функции z, предполагается, что $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$.

85. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z(x, y)$, заданной неявно уравнением $x^3-3y^2+2z^2-xz+y=0$.

Решение. Обозначим левую часть уравнения через $F(x, y, z)$. Тогда

$$\frac{\partial F}{\partial x}=3x^2-z; \quad \frac{\partial F}{\partial y}=-6\,y+1; \quad \frac{\partial F}{\partial z}=4z-x.$$

Используя формулы (4) и (5), получим:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{3x^2-z}{4z-x}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{6y-1}{4z-x}.$$

86. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z(x, y)$, заданной уравнением:

а) $x^2+y^2+z^2-6x=0$; б) $z^3+3xyz-6=0$;

в) $e^z-xyz=0$; г) $x\cos y+y\cos z+z\cos x=1$.

§ 10. ПРОИЗВОДНАЯ В ДАННОМ НАПРАВЛЕНИИ. ГРАДИЕНТ ФУНКЦИИ

Пусть функция $z=f(x, y)$ непрерывна в некоторой области D. Пусть точке $P(x, y)$ из этой области соответствует на поверхности $z=f(x,y)$ точка $M\,(x,y,z)$, а точке $P_1(x+\Delta x, y+\Delta y)$ соответствует точка $M_1(x+\Delta x,\; y+\Delta y, z+\Delta z)$ (рис. 5).

Пусть вектор $\overline{PP_1}$, направление которого мы обозначим через $\bar{l}$, образует с осью Ox угол α, а с осью Oy угол β.

Приращение $\Delta z=f(P_1)-f(P)$ возникло в результате перемещений точки P по направлению вектора $\bar{l}$ на величину $PP_1=\Delta l$.

Отношение $\frac{\Delta z}{\Delta l}$ выражает среднюю скорость изменения функции z в направлении $\bar{l}$ на участке Δl, а предел этого отношения при $\Delta l \to 0$ выражает мгновенную скорость изменения функции z в точке P в направлении $\bar{l}$.