Глава 2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. ТЕОРЕМА КРОНЕКЕРА–КАПЕЛЛИ. МЕТОД ГАУССА

$\Rrightarrow$ Пусть задана система из m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1.1}$$

где числа a_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$) называются *коэффициентами системы*, а числа $b_1, \ldots, b_m$ — *свободными членами*.

$\Rrightarrow$ *Решением системы* (1.1) называется такой набор чисел $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, что при его подстановке в систему вместо соответствующих неизвестных (c_1 вместо x_1, ..., c_n вместо x_n) каждое из уравнений системы обращается в тождество.

$\Rrightarrow$ Если система (1.1) имеет хотя бы одно решение, она называется *совместной*; система, не имеющая ни одного решения, называется *несовместной*. Система называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если она имеет более одного решения.

$\Rrightarrow$ Две системы линейных уравнений с одинаковым числом неизвестных называются *эквивалентными*, если множества всех решений этих систем совпадают.

$\Rrightarrow$ Если $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$, то система называется *однородной*, в противном случае она называется *неоднородной*.

Систему (1.1) можно записать в матричной форме:

$$AX = B,$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ — *матрица системы*, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ —

столбец (или вектор-столбец) *неизвестных*, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ — *столбец свободных членов.*

$\Rrightarrow$ Матрица $(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ называется *расширенной матрицей системы.*

Теорема 2.1 (Кронекера-Капелли). Система линейных уравнений (1.1) совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы:

$$r(A) = r(A|B).$$

Исследовать систему линейных уравнений означает определить, совместна она или нет, а для совместной системы — выяснить, определенна она или нет. При этом возможны три варианта:

1) Если $r(A) < r(A|B)$, то система несовместна.

2) Если $r(A) = r(A|B) = n$ (где n — число неизвестных), то система совместна и определенна.

3) Если $r(A) = r(A|B) < n$, то система совместна и неопределенна.

Для исследования систем линейных уравнений и нахождения их решений можно использовать, например, *метод Гаусса*:

С помощью элементарных преобразований над строками приведем расширенную матрицу системы $(A|B)$ к ступенчатому виду $(A'|B')$:

$$(A'|B') = \left(\begin{array}{ccccccc|c} a'_{11} & \dots & a'_{1k_2} & \dots & a'_{1k_r} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & \dots & a'_{2k_2} & \dots & a'_{2k_r} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & a'_{rk_r} & \dots & a'_{rn} & b'_r \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b'_{r+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b'_m \end{array}\right),$$

где в i-ой строке ($i = 1, 2, \dots, r$) самый левый ненулевой элемент обозначен через a_{ik_i}.

Полученной расширенной матрице $(A'|B')$ соответствует система линейных уравнений, эквивалентная системе (1.1). При этом $r(A') = r(A)$, $r(A'|B') = r(A|B)$, и утверждения о том, что полученная система совместна (несовместна) и определенна (неопределенна) верны и для системы (1.1).

Если хотя бы одно из чисел $b'_{r+1}, \dots, b'_m$ не равно нулю, то $r(A'|B') > r(A')$, и система несовместна; иначе (если $b'_{r+1} = \ldots = b'_m = 0$) система совместна. В случае, когда система совместна, будет $r(A') = r(A'|B') = r$, где r — число ненулевых строк матриц A' и $(A'|B')$. Если $r = n$ (где n — число неизвестных), то система определенна, в противном случае (если $r < n$) система неопределенна.

Базисным минором матриц A' и $(A'|B')$ является, например, минор, составленный из элементов этих матриц, расположенных в первых r строках и столбцах с номерами $1, k_2, k_3, \dots, k_r$. Назовем *базисными* (или *главными*) r переменных $x_1, x_{k_2}, x_{k_3}, \dots, x_{k_r}$, а остальные $n - r$ переменных назовем *свободными*. Без ограничения общности можно предположить, что главными переменными являются $x_1, x_2, x_3, \dots, x_r$, а свободными — $x_{r+1}, \dots, x_n$. Тогда матрица $(A'|B')$ (в случае когда $r(A') = r(A'|B')$) запишется в виде:

$$(A'|B') = \left(\begin{array}{ccccccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1r} & a'_{1r+1} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2r} & a_{2r+1} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a'_{rr} & a_{rr+1} & \dots & a'_{rn} & b'_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Запишем систему уравнений, соответствующую расширенной матрице $(A'|B')$ в следующем виде — перенесем все слагаемые со свободными переменными $x_{r+1}, \dots, x_n$ в правую часть:

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \ldots + a'_{1r}x_r = b'_1 - a'_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - a'_{1n}x_n, \\ \qquad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2r}x_r = b'_2 - a'_{2r+1}x_{r+1} - \ldots - a'_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a'_{r-1r-1}x_{r-1} + a'_{r-1r}x_r = b'_{r-1} - a'_{r-1r+1}x_{r+1} - \ldots - a'_{r-1n}x_n, \\ \qquad a'_{rr}x_r = b'_r - a'_{rr+1}x_{r+1} - \ldots - a'_{rn}x_n, \end{cases} \tag{1.2}$$

где коэффициенты $a'_{11}, a'_{22}, \dots, a'_{rr}$ не равны нулю.

Пусть свободные переменные $x_{r+1}, \dots, x_n$ принимают значения $t_1, \dots, t_{n-r}$. Тогда из последнего уравнения системы (1.2) переменная x_r однозначно выражается через $t_1, \dots, t_{n-r}$:

$$x_r = x_r(t_1, \dots, t_{n-r}) = \frac{1}{a'_{rr}}(b'_r - a'_{rr+1}t_1 - \ldots - a'_{rn}t_{n-r}).$$

Подставляя это значение x_r в предпоследнее уравнение системы (1.2), получим выражение, однозначно задающее x_{r-1} через $t_1, \dots, t_{n-r}$:

$$x_{r-1} = x_{r-1}(t_1, \dots, t_{n-r}).$$

Продолжая подставлять полученные значения $x_r, x_{r-1}, \dots$ в уравнения системы (1.2), получим выражения, однозначно задающие $x_1, x_2, \dots, x_r$ через $t_1, \dots, t_{n-r}$. Таким образом, каждому фиксированному набору значений свободных переменных $x_{r+1} = t_1, \dots, x_n = t_{n-r}$ соответствует единственное решение системы (1.2) и системы (1.1):

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t_1, \dots, t_{n-r}) \\ \vdots \\ x_r(t_1, \dots, t_{n-r}) \\ t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_{n-r} \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

$\Rrightarrow$ *Общим решением* системы (1.1) называется множество всех ее решений, записанных в виде формулы (1.3), выражающей произвольное решение системы в виде функций от $n-r$ свободных переменных.

2.1.1. Исследовать систему линейных уравнений; если она совместна, то найти ее общее и одно частное решение:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -1, \\ 2x_1 + x_2 = 7. \end{cases}$$

◑ Запишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mathrm{II} - 2 \cdot \mathrm{I} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 9 \end{array}\right).$$

Ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы:

$$r(A) = r(A|B) = 2,$$

значит, *система совместна.* Количество неизвестных также равно 2:

$$n = r(A) = r(A|B) = 2,$$

значит, *система определенна*, т. е. имеет единственное решение. Запишем систему уравнений, соответствующую полученной расширенной матрице:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -1, \\ 3x_2 = 9. \end{cases}$$

Из второго уравнения $x_2 = 3$; подставляя это значение в первое уравнение, получим $x_1 = 2$.

Итак, общее решение (оно же единственное частное): $(2;3)$.
Ответ. система совместна и определенна; общее решение $(2;3)$; частное решение $(2;3)$. ●

2.1.2. Исследовать систему линейных уравнений; если она совместна, то найти ее общее и одно частное решение:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ -2x_1 - 2x_3 = 16. \end{cases}$$

◐ Приведем к ступенчатому виду расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 16 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \mathrm{II}-\mathrm{I} \\ \mathrm{III}+2\cdot\mathrm{I} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & 8 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{III}-2\cdot\mathrm{II} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Так как

$$r(A) = r(A|B) = 2 < 3 = n,$$

то ***система совместна и неопределенна*** (т. е имеет бесконечно много решений).

Количество главных переменных равно $r(A) = 2$, количество свободных переменных равно $n - r(A) = 3 - 2 = 1$. Выберем какой-нибудь не равный нулю минор 2-го порядка полученной матрицы A, например, минор $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$. Его столбцы — 1-й и 2-й столбцы матрицы A — соответствуют переменным x_1 и x_2 — это будут *главные переменные*, а x_3 — *свободная переменная*. Запишем систему уравнений, соответствующую полученной расширенной матрице:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$$

Теперь для наглядности запишем эту систему в другом виде (слева остаются только главные переменные):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 - 4, \\ x_2 = 2x_3 + 4. \end{cases}$$

Подставляя выражение для x_2 в первое уравнение, получим $x_1 = -x_3 - 8$. Обозначая свободную переменную x_3 через t, получим *общее решение системы*: $(-t - 8; 2t + 4; t)$. *Частное решение системы* получим, например, при $t = 0$: $(-8; 4; 0)$.

Ответ. система совместна и неопределенна; общее решение $(-t-8; 2t+4; t)$; частное решение $(-8; 4; 0)$. ●

2.1.3. Исследовать систему линейных уравнений; если она совместна, то найти ее общее и одно частное решение:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 6x_1 - 3x_2 - 3x_3 - x_4 = -9, \\ -7x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 8, \\ -3x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 12. \end{cases}$$

❍ Приведем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 & -1 & -9 \\ -7 & 1 & 1 & -2 & 8 \\ -3 & 9 & 9 & 10 & 12 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mathrm{II} - 6\cdot\mathrm{I} \\ \mathrm{III} + 7\cdot\mathrm{I} \\ \mathrm{IV} + 3\cdot\mathrm{I} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -15 & -15 & -19 & -15 \\ 0 & 15 & 15 & 19 & 15 \\ 0 & 15 & 15 & 19 & 15 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{III} + \mathrm{II} \\ \mathrm{IV} + \mathrm{II} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -15 & -15 & -19 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mathrm{II}\cdot(-1) \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 15 & 15 & 19 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Так как

$$r(A) = r(A|B) = 2 < 4 = n,$$

то *система совместна и неопределенна.*

Количество главных переменных равно $r(A) = 2$, количество свободных переменных равно $n - r(A) = 4 - 2 = 2$. Выберем какой-нибудь не равный нулю минор 2-го порядка полученной матрицы A, например, минор $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 15 \end{vmatrix}$. Его столбцы (1-й и 2-й столбцы матрицы A) соответствуют переменным x_1 и x_2 — это будут *главные переменные*, а x_3 и x_4 — *свободные переменные*. Заметим, что в качестве главных переменных в данном примере нельзя выбрать пару x_2 и x_3, так как любой соответствующий им минор равен нулю: $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 15 & 15 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$,

$\begin{vmatrix} 15 & 15 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$. Запишем систему уравнений, соответствующую полученной расширенной матрице:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 15x_2 + 15x_3 + 19x_4 = 15. \end{cases}$$

Теперь запишем эту систему в другом виде (слева остаются только главные переменные):

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 - 2x_3 - 3x_4, \\ 15x_2 = 15 - 15x_3 - 19x_4. \end{cases}$$

Из второго уравнения выразим x_2, через x_3 и x_4: $x_2 = 1 - x_3 - \frac{19}{15}x_4$. Подставляя выражение для x_2 в первое уравнение, получим $x_1 = -1 - \frac{7}{15}x_4$. Обозначим свободные переменные: x_3 через t_1, x_4 через $15t_2$. Запишем *общее решение системы*: $(-1 - 7t_2; 1 - t_1 - 19t_2; t_1; 15t_2)$. *Частное решение системы* получим, например, при $t_1 = 1$, $t_2 = 0$: $(-1; 0; 1; 0)$.

Ответ. система совместна и неопределенна; общее решение $(-1-7t_2; 1-t_1-19t_2; t_1; 15t_2)$; частное решение $(-1; 0; 1; 0)$. ●

2.1.4. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ -2x_1 - 2x_3 = 3. \end{cases}$$

❍ Приведем к ступенчатому виду расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mathrm{II} - \mathrm{I} \\ \mathrm{III} + 2\cdot\mathrm{I} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{III} - 2\cdot\mathrm{II} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{array}\right).$$

Так как

$$r(A) = 2 \neq 3 = r(A|B),$$

то *система несовместна* (не имеет решений). В самом деле, последней строке полученной расширенной матрицы соответствует уравнение $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = -13$, не имеющее решений.

Ответ. система несовместна. ●

Исследовать системы линейных уравнений, для совместных систем найти общее и одно частное решения:

2.1.5. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 - x_2 = -1. \end{cases}$

2.1.6. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 = 0. \end{cases}$

2.1.7. $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 = 2. \end{cases}$

2.1.8. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$

2.1.9. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$

2.1.10. $\begin{cases} 3x - y + 2z = 0, \\ 4x - 3y + 3z = 0, \\ x + 3y = 0. \end{cases}$

2.1.11. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

2.1.12. $\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 9, \\ 2x + 5y - 3z = 4, \\ 5x + 6y - 2z = 18. \end{cases}$

2.1.13. $\begin{cases} 2x - 3y = -2, \\ x + 2y = 2{,}5, \\ -2x - 4y = -5, \\ 2\sqrt{3}x - 3\sqrt{3}y = -2\sqrt{3}. \end{cases}$

2.1.14. $\begin{cases} 3x - y + 2z = 2, \\ 4x - 3y + 3z = 3, \\ x + 3y = 0, \\ 5x + 3z = 3. \end{cases}$

2.1.15. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 \qquad = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3, \\ 7x_1 - 5x_2 - 9x_3 + 10x_4 = 8. \end{cases}$

2.1.16. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 8, \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ 4x_1 - 7x_2 - 18x_3 + 11x_4 = -13, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 9. \end{cases}$

2.1.17. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 4. \end{cases}$

2.1.18. $\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 21, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 15, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 18. \end{cases}$

2.1.19. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 6x_5 = 5, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 7. \end{cases}$

2.1.20. $\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8. \end{cases}$

2.1.21. Исследовать систему из n линейных уравнений, найти общее и одно частное решение.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n-2, \\ x_1 + x_3 + \ldots + x_n = n-3, \\ x_1 + x_2 + x_4 + \ldots + x_n = n-3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} = n-3. \end{cases}$$

❍ Приведем к ступенчатому виду расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & n-2 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 & n-3 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 1 & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 & n-3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mathrm{II}-\mathrm{I} \\ \mathrm{III}-\mathrm{I} \\ \vdots \\ (\mathrm{n})-\mathrm{I} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & n-2 \\ 0 & -1 & 0 & \ldots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \ldots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mathrm{II}\cdot(-1) \\ \mathrm{III}\cdot(-1) \\ \vdots \\ (\mathrm{n})\cdot(-1) \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & n-2 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathrm{I}-\mathrm{II}-\mathrm{III}-\ldots-(\mathrm{n}) \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|l} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & n-2\overbrace{-1-1-\ldots-1}^{(n-1)\ \text{раз}} = -1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Запишем систему уравнений, соответствующую полученной расширенной матрице:

$$\begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 1, \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_n = 1. \end{cases}$$

Очевидно, эта система совместна и определенна, единственное решение $(-1; 1; 1; \ldots; 1)$.

Ответ. система совместна и определенна; общее решение (оно же частное решение) $(-1, 1, 1, \ldots, 1)$. ●

Исследовать систему из n линейных уравнений, найти общее и одно частное решение:

2.1.22. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n, \\ 2x_1 + 2x_2 + \ldots + 2x_n = 2n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ nx_1 + nx_2 + \ldots + nx_n = n^2. \end{cases}$$

2.1.23. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n, \\ 2x_1 + 2x_2 + \ldots + 2x_n = 2n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (n-1)x_1 + (n-1)x_2 + \ldots + (n+1)x_n = (n-1)n, \\ nx_1 + nx_2 + \ldots + nx_n = 0. \end{cases}$$

2.1.24. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_{n-1} + x_n = n, \\ x_1 \qquad + x_3 + x_4 + \ldots + x_{n-1} + x_n = n-1, \\ x_1 + x_2 \qquad + x_4 + \ldots + x_{n-1} + x_n = n-2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \ldots \qquad + x_n = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_{n-1} \qquad = 1. \end{cases}$$

2.1.25. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + \ldots + (n-1)x_{n-1} + nx_n = n, \\ -x_1 \qquad + 3x_3 + 4x_4 + \ldots + (n-1)x_{n-1} + nx_n = -n, \\ -x_1 - 2x_2 \qquad + 4x_4 + \ldots + (n-1)x_{n-1} + nx_n = -n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 - \ldots - (n-2)x_{n-2} + nx_n = -n, \\ -x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 - \ldots - (n-1)x_{n-1} \qquad = -n. \end{cases}$$

2.1.26. Исследовать систему линейных уравнений в зависимости от параметра λ. В случае, когда система совместна, найти общее и одно частное решение:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 8, \\ 4x_1 - 2x_2 = \lambda. \end{cases}$$

❍ Приведем к ступенчатому виду расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 8 \\ 4 & -2 & \lambda \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mathrm{II} - 2\cdot \mathrm{I} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & \lambda - 16 \end{array}\right).$$

Запишем полученную матрицу системы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ее ранг $r(A)$ равен 1.

а) При $\lambda \neq 16$ получим расширенную матрицу системы $(A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & \lambda - 16 \end{array}\right)$, ее ранг $r(A|B)$ равен 2. Таким образом, $r(A) = 1 \neq 2 = r(A|B)$, *система несовместна.*

б) При $\lambda = 16$ получим расширенную матрицу системы $(A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, ее ранг $r(A|B)$ равен 1. Значит, $r(A) = r(A|B) = 1 < 2 = n$, *система совместна и неопределенна.* Полученной расширенной матрице системы соответствует уравнение $2x_1 - x_2 = 8$. В качестве главной переменной можно взять, например, $x_2 = 2x_1 - 8$. Обозначая свободную переменную x_1 через t, получим общее решение системы: $(t; 2t - 8)$. Частное решение системы получим, например, при $t = 0$: $(0; -8)$. *Ответ.* При $\lambda \neq 16$ система несовместна; при $\lambda = 16$ система совместна и неопределенна, общее решение $(t; 2t - 8)$, частное решение $(0; -8)$. ●

Исследовать системы линейных уравнений, зависящих от параметра λ. Для совместных систем найти общее и одно частное решение:

2.1.27. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 8, \\ 2x_1 + x_2 = \lambda. \end{cases}$

2.1.28. $\begin{cases} 2x_1 + \lambda x_2 = 6, \\ \lambda x_1 + 8x_2 = 12. \end{cases}$

2.1.29. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ \lambda x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 10. \end{cases}$

2.1.30. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 4, \\ x_1 - 6x_2 - \lambda x_3 = 9. \end{cases}$

2.1.31. $\begin{cases} (1 + \lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + (1 + \lambda)x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + (1 + \lambda)x_3 = \lambda^2. \end{cases}$

5 – 2361

Дополнительные задачи

Исследовать системы линейных уравнений, для совместных систем найти общее и одно частное решение:

2.1.32. $\begin{cases} x_1 - \ x_2 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 = 5. \end{cases}$

2.1.33. $\begin{cases} 3x + 2y = 5, \\ 6x + 4y = 10. \end{cases}$

2.1.34. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3, \\ -2x_1 + 3x_2 = 0, \\ -2x_1 - 4x_2 = 1. \end{cases}$

2.1.35. $\begin{cases} x - \sqrt{3}\,y = 1, \\ \sqrt{3}\,x - 3y = \sqrt{3}, \\ -\frac{\sqrt{3}}{3}x + y = -\frac{\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$

2.1.36. $\begin{cases} 3x - y = -5, \\ 2x + 3y = 4, \\ -x + \frac{1}{3}y = \frac{5}{3}, \\ x + 1{,}5y = 2. \end{cases}$

2.1.37. $\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 8, \\ 2x - 4y - 3z = -1, \\ x + 5y + z = 0. \end{cases}$

2.1.38. $\begin{cases} -x + y - 3z = 5, \\ 3x - y - z = 2, \\ 2x + y - 9z = 0. \end{cases}$

2.1.39. $\begin{cases} 2x - y - z = 0, \\ 3x + 4y - 2z = 0, \\ 3x - 2y + 4z = 0. \end{cases}$

2.1.40. $\begin{cases} 3x + y - 5z = 0, \\ x - 2y - z = 0, \\ 2x + 3y - 4z = 0, \\ x + 5y - 3z = 0. \end{cases}$

2.1.41. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = -5. \end{cases}$

2.1.42. $\begin{cases} 2\sqrt{5}\,x_1 - x_2 + \sqrt{5}\,x_3 = 1, \\ 10x_1 - \sqrt{5}\,x_2 + 5x_3 = \sqrt{5}, \\ -2x_1 + \frac{\sqrt{5}}{5}x_2 - x_3 = -\frac{1}{\sqrt{5}}. \end{cases}$

2.1.43. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7, \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13. \end{cases}$

2.1.44. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -3. \end{cases}$

2.1.45. $$\begin{cases} 45x_1 - 28x_2 + 34x_3 - 52x_4 = 9, \\ 36x_1 - 23x_2 + 29x_3 - 43x_4 = 3, \\ 35x_1 - 21x_2 + 28x_3 - 45x_4 = 16, \\ 47x_1 - 32x_2 + 36x_3 - 48x_4 = -17, \\ 27x_1 - 19x_2 + 22x_3 - 35x_4 = 6. \end{cases}$$

2.1.46. $$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -7, \\ 9x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2. \end{cases}$$

2.1.47. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2. \end{cases}$$

Системы 2.1.48–2.1.50 содержат по n уравнений.

2.1.48. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + \ldots + 2nx_n = 2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ nx_1 + 2nx_2 + 3nx_3 + \ldots + n^2x_n = n. \end{cases}$$

2.1.49. $$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \ldots + (-1)^{n-1}x_n = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 + \ldots + 2 \cdot (-1)^{n-1}x_n = 2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (n-1)x_1 - (n-1)x_2 + \ldots + (n-1) \cdot (-1)^{n-1}x_n = n-1, \\ nx_1 - nx_2 + nx_3 - nx_4 + \ldots + n \cdot (-1)^{n-1}x_n = 0. \end{cases}$$

2.1.50. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + x_{n-1} = 1, \\ x_1 + x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + x_{n-2} + x_n = 2, \\ x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_{n-3} + x_{n-1} + x_n = 3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 + x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + x_n = n-1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + x_n = 0. \end{cases}$$

2.1.51. $$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = -1, \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ \qquad\ddots \qquad\qquad \vdots \\ -x_{n-2} + 2x_{n-1} - x_n = 0, \\ -x_{n-1} + 2x_n = 1. \end{cases}$$