В формулах (4) и (5), которые позволяют находить частные производные неявно заданной функции z, предполагается, что $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$.

85. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z(x, y)$, заданной неявно уравнением $x^3 - 3y^2 + 2z^2 - xz + y = 0$.

Решение. Обозначим левую часть уравнения через $F(x, y, z)$. Тогда

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - z; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -6y + 1; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 4z - x.$$

Используя формулы (4) и (5), получим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{3x^2 - z}{4z - x}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{6y - 1}{4z - x}.$$

86. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z(x, y)$, заданной уравнением:

а) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x = 0$; б) $z^3 + 3xyz - 6 = 0$;

в) $e^z - xyz = 0$; г) $x \cos y + y \cos z + z \cos x = 1$.

§ 10. ПРОИЗВОДНАЯ В ДАННОМ НАПРАВЛЕНИИ. ГРАДИЕНТ ФУНКЦИИ

Пусть функция $z = f(x, y)$ непрерывна в некоторой области D. Пусть точке $P(x, y)$ из этой области соответствует на поверхности $z = f(x,y)$ точка $M(x,y,z)$, а точке $P_1(x+\Delta x, y+\Delta y)$ соответствует точка $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ (рис. 5).

Пусть вектор $\overline{PP_1}$, направление которого мы обозначим через $\overline{l}$, образует с осью Ox угол α, а с осью Oy угол β.

Приращение $\Delta z = f(P_1) - f(P)$ возникло в результате перемещений точки P по направлению вектора $\overline{l}$ на величину $PP_1 = \Delta l$.

Отношение $\frac{\Delta z}{\Delta l}$ выражает среднюю скорость изменения функции z в направлении $\overline{l}$ на участке Δl, а предел этого отношения при $\Delta l \to 0$ выражает мгновенную скорость изменения функции z в точке P в направлении $\overline{l}$.

$3x^2 - 6y = 0 \quad x^2 - 2y = 0$

Производной функции двух переменных $z=f(x, y)$ в данном направлении $\overline{l}$ называется предел отношения $\frac{\Delta z}{\Delta l}$ при условии, что $\Delta l \to 0$, то есть

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta l}.$$

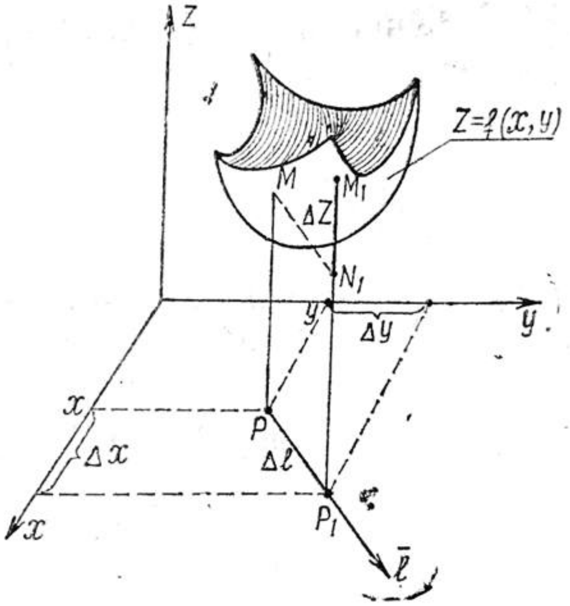

Рис. 5

Если функция $z=f(x, y)$ дифференцируема в точке $P(x, y)$, то

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \cos \beta. \qquad (1)$$

Градиентом функции $z=f(x, y)$ называется вектор плоскости xOy, имеющий проекции $\frac{\partial z}{\partial x}$ на оси Ox и $\frac{\partial z}{\partial y}$ на оси Oy. Градиент обозначается символом $\operatorname{grad} z$.

$$\operatorname{grad} z = \frac{\partial z}{\partial x} i + \frac{\partial z}{\partial y} j. \qquad (2)$$

Направление градиента является направлением быстрейшего возрастания функции $z=f(x, y)$. Модуль градиента равен наибольшему возможному значению производной от функции z в данной точке в любом направлении.

Понятие производной в данном направлении можно перенести на случай, когда имеется функция трех независимых переменных $u=f(x, y, z)$, заданной в некоторой области V.

В этом случае производная $\frac{\partial u}{\partial l}$ в направлении $\overline{l}$ находится по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma, \tag{3}$$

где α, β и γ — углы, образуемые вектором $\overline{l}$ с осями координат.

Градиентом функции $u=f(x, y, z)$ называется вектор, проекциями которого служат значения частных производных этой функции, то есть

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k. \tag{4}$$

87. Найти производную функции $z = x^2+y^2$ в направлении, составляющем с положительным направлением оси Ox угол $\alpha=60°$.

Решение. Применяем формулу (1).

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y.$$

Так как $\alpha=60°$, то $\beta=30°$. $\cos 60° = \frac{1}{2}$; $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Следовательно, $\frac{\partial z}{\partial l} = x + \sqrt{3}y$.

88. Дана функция $u=x^2+y^2+z^2$. Найти производную $\frac{\partial u}{\partial l}$ в точке $A(1, 2, 3)$ в направлении вектора $\overline{AB}$, где $B(2, 4, 1)$.

Решение. Находим направляющие косинусы вектора $\overline{AB}$ (вектора $\overline{l}$).

$$\overline{AB} = i+2j-2k; \quad |\overline{AB}| = \sqrt{1+4+4} = 3;$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{3}, \cos\beta = \frac{2}{3}; \cos\gamma = -\frac{2}{3}.$$

Применяя формулу (3), будем иметь:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = 2x\cdot\cos\alpha + 2y\cdot\cos\beta + 2z\cdot\cos\gamma.$$

При $x=1$, $y=2$ и $z=3$ получим $\frac{\partial u}{\partial l}$ в точке A:

$$\left[\frac{\partial u}{\partial l}\right]_A = 2\cdot\frac{1}{3}+4\cdot\frac{2}{3}+6\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{2}{3}.$$

89. Найти производную функции $z=2x^2-y^4$ в направлении $\overline{l}$, составляющем с положительным направлением оси Ox угол $\alpha=30°$.

90. Найти значение производной функции $u=xy^2-xyz+z^3$ в точке $M(1;\ 1;\ 2)$ в направлении $\overline{l}$, образующем с осями координат Ox, Oy и Oz соответственно углы 60°, 45° и 60°.

91. Найти производную функции $u=xy+yz+zx$ в точке $M(3;\ 1;\ 2)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $N(6;\ 13;\ 6)$.

92. Вычислить градиент функции $z=x^3+y^3-3xy$ в точке $A(2;\ 1)$.

Решение. Находим значения частных производных $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точке A и подставляем их в формулу (2).

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2-3y;\quad \left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]_A=9;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=3y^2-3x;\quad \left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]_A=-3.$$

Следовательно, $(\operatorname{grad} z)_A=9i-3j$.

93. Найти направление быстрейшего возрастания функции

$$z=x^2+xy+3 \text{ в точке } P(1;\ -1).$$

Решение. Известно, что направление градиента в данной точке является направлением быстрейшего возрастания функции. Производная функции $z=f(x, y)$ в направлении градиента $\operatorname{grad} z$ принимает наибольшее значение, равное модулю градиента.

Вычислим градиент функции z в данной точке P.

$$\operatorname{grad} z=(2x+y)i+xj;\quad (\operatorname{grad} z)_P=i+j.$$

Вычислим направляющие косинусы $\operatorname{grad} z$:

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}};\quad \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, направление быстрейшего возрастания составляет с осями координат угол в 45°.

94. Найти наибольшее значение производной по направлению для функции $u = x^2y + xyz + z$ в точке $M(-1; 2; 3)$.

Решение. Наибольшее значение производной равно модулю градиента функции u в точке M.

Пользуясь формулой (4), находим grad u.

$$\operatorname{grad} u = (2xy + yz)i + (x^2 + xz)j + (xy + 1)k;$$

$$(\operatorname{grad} u)_M = 2i - 2j - k; \qquad |\operatorname{grad} u| = \sqrt{4+4+1} = 3.$$

95. Вычислить градиент функции $z = 3x^2y - 3xy^3 + y^4$ в точке $P(1; 2)$.

96. Найти наибольшее значение производной по направлению для функции $z = x^2 + 2y^2 + 3$ в точке $P(2; 1)$.

97. Найти направление быстрейшего возрастания функции $u = x^2 + y^2 + z^2$ в точке $M(2; -2; 1)$.

§ 11. КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ И НОРМАЛЬ К ПОВЕРХНОСТИ

Пусть поверхность задана уравнением $F(x, y, z) = 0$ и пусть точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит этой поверхности.

Касательной плоскостью к поверхности в данной точке M_0 называется плоскость, проходящая через точку M_0 и содержащая в себе все касательные, проведенные в точке M_0 ко *всевозможным* кривым, лежащим на поверхности и проходящим через точку M_0.

Уравнение касательной плоскости, проведенной к поверхности $F(x, y, z) = 0$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, имеет вид:

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_{M_0}(x - x_0) + \left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]_{M_0}(y - y_0) + \left[\frac{\partial F}{\partial z}\right]_{M_0}(z - z_0) = 0. \qquad (1)$$

Нормалью к поверхности в точке M_0 называется прямая, проходящая через точку M_0 и перпендикулярная к касательной плоскости, проведенной в этой точке.

Уравнения нормали, проведенной к поверхности $F(x, y, z) = 0$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, имеет вид:

$$\frac{x - x_0}{\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_{M_0}} = \frac{y - y_0}{\left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]_{M_0}} = \frac{z - z_0}{\left[\frac{\partial F}{\partial z}\right]_{M_0}}. \qquad (2)$$