Следовательно, направление быстрейшего возрастания составляет с осями координат угол в 45°.

94. Найти наибольшее значение производной по направлению для функции $u=x^2y+xyz+z$ в точке $M(-1;\ 2;\ 3)$.

Решение. Наибольшее значение производной равно модулю градиента функции u в точке M.

Пользуясь формулой (4), находим $\operatorname{grad} u$.

$$\operatorname{grad} u=(2xy+yz)i+(x^2+xz)j+(xy+1)k;$$

$$(\operatorname{grad} u)_M=2i-2j-k; \qquad |\operatorname{grad} u|=\sqrt{4+4+1}=3.$$

95. Вычислить градиент функции $z=3x^2y-3xy^3+y^4$ в точке $P(1;\ 2)$.

96. Найти наибольшее значение производной по направлению для функции $z=x^2+2y^2+3$ в точке $P(2;\ 1)$.

97. Найти направление быстрейшего возрастания функции $u=x^2+y^2+z^2$ в точке $M(2;\ -2;\ 1)$.

§ 11. КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ И НОРМАЛЬ К ПОВЕРХНОСТИ

Пусть поверхность задана уравнением $F(x,\ y,\ z)=0$ и пусть точка $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ принадлежит этой поверхности.

Касательной плоскостью к поверхности в данной точке M_0 называется плоскость, проходящая через точку M_0 и содержащая в себе все касательные, проведенные в точке M_0 ко всевозможным кривым, лежащим на поверхности и проходящим через точку M_0.

Уравнение касательной плоскости, проведенной к поверхности $F(x, y, z)=0$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, имеет вид:

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_{M_0}(x-x_0)+\left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]_{M_0}(y-y_0)+\left[\frac{\partial F}{\partial z}\right]_{M_0}(z-z_0)=0. \qquad (1)$$

Нормалью к поверхности в точке M_0 называется прямая, проходящая через точку M_0 и перпендикулярная к касательной плоскости, проведенной в этой точке.

Уравнения нормали, проведенной к поверхности $F(x, y, z)=0$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, имеет вид:

$$\frac{x-x_0}{\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_{M_0}}=\frac{y-y_0}{\left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]_{M_0}}=\frac{z-z_0}{\left[\frac{\partial F}{\partial z}\right]_{M_0}}. \qquad (2)$$

Если поверхность задана уравнением $z=f(x, y)$, то его можно переписать так: $f(x, y)-z=0$, или $F(x, y, z)=f(x, y)-z$.

Тогда $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}=-1$

и уравнение касательной плоскости (1) примет вид:

$$z-z_0=\left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]_{M_0}(x-x_0)+\left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]_{M_0}(y-y_0). \tag{3}$$

Уравнение нормали (2) в этом случае примет вид:

$$\frac{x-x_0}{\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]_{M_0}}=\frac{y-y_0}{\left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]_{M_0}}=\frac{z-z_0}{-1}. \tag{4}$$

98. Найти уравнение касательной плоскости и уравнения нормали к поверхности $z=x^2+3y^2$ в точке $M(-2;\ 1;\ 7)$.

Решение. Находим значения частных производных $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точке M и подставляем в (3) и (4):

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x;\ \left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]_M=-4;\ \frac{\partial z}{\partial y}=6y;\ \left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]_M=6.$$

$$z-7=-4(x+2)+6(y-1)$$

или $4x-6y+z+7=0$ — искомое уравнение касательной плоскости;

$\frac{x+2}{-4}=\frac{y-1}{6}=\frac{z-7}{-1}$ — уравнения нормали.

99. Найти уравнение касательной плоскости и уравнения нормали к конусу $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}-\frac{z^2}{9}=0$ в точке $A(2;\ -3;\ -6)$.

Решение. По условию $F(x, y, z)=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}-\frac{z^2}{9}$. Находим значения частных производных в заданной точке A.

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{x}{2};\ \left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_A=1;\ \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{2y}{3};\ \left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]_A=-2;$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=\frac{-2z}{9};\ \left[\frac{\partial F}{\partial z}\right]_A=\frac{4}{3}.$$

Подставляя найденные значения частных производных в (1), получим уравнение касательной плоскости.

$$1\cdot(x-2)-2(y+3)+\frac{4}{3}(z+6)=0;\ 3x-6y+4z=0.$$

Применяя (2), получим уравнения нормали:

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z+6}{\frac{4}{3}}\quad \text{или}\quad \frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{-6}=\frac{z+6}{4}.$$

100. Найти уравнение касательной плоскости к поверхности $3xy+4xz-y^2-2=0$ в точке $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$, если $x_0=1$ и $y_0=-2$.

Решение. Подставляя значения x_0 и y_0 в данное уравнение, находим соответствующее значение z_0.

Имеем: $3\cdot 1\cdot(-2)+4z_0-(-2)^2-2=0$, откуда $z_0=3$.

Следовательно, $M_0(1;\ -2;\ 3)$—точка касания.

$$F(x,y,z)=3xy+4xz-y^2-2;$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=3y+4z;\ \left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_{M_0}=-6+12=6;\ \frac{\partial F}{\partial y}=3x-2y;$$

$$\left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]_{M_0}=3+4=7;\quad \frac{\partial F}{\partial z}=4x;\quad \left[\frac{\partial F}{\partial z}\right]_{M_0}=4.$$

Подставляя найденные значения частных производных в (1), получим искомое уравнение касательной плоскости.

$$6(x-1)+7(y+2)+4(z-3)=0 \text{ или } 6x+7y+4z-4=0.$$

101. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z=\frac{x^2}{2}+y^2$ в точке А $(2;\ 2;\ 6)$.

102. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z=x^2+y^2$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$, если $x_0=1$ и $y_0=-2$.

103. В данной точке M_0 найти уравнения касательной плоскости и нормали к следующим поверхностям:

а) $x^2+y^2-z^2=0$; $\quad M_0(3,\ 4,\ 5)$;

б) $2xy^2-z^3+5=0$; $\quad M_0(-2,\ 1,\ 1)$.

104. Составить уравнение касательной плоскости к данной поверхности в точке, абсцисса и ордината которой заданы.

а) $x^2+y^2-xyz-4=0$; $x_0=1$; $y_0=-1$;

б) $x^2yz-2y-3z+1=0$; $x_0=1$; $y_0=-2$.

§12. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Пусть дана функция $z=f(x, y)$, имеющая частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, которые, в свою очередь, являются дифференцируемыми функциями.

Если частную производную $\frac{\partial z}{\partial x}$ продифференцировать по x, то есть найти $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$, то получим частную производную второго порядка от функции z, взятую два раза по x. Эта производная обозначается символом $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ или f''_{xx}.

Если частную производную $\frac{\partial z}{\partial x}$ продифференцировать по y, то есть найти $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$, то получим частную производную второго порядка от функции z, взятую сначала по x, а затем по y. Эта производная обозначается символом $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ или f''_{xy}.

Аналогично, если частную производную $\frac{\partial z}{\partial y}$ продифференцировать по x, то есть найти $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$, то получим частную производную второго порядка от функции z, взятую сначала по y, а затем по x. Эта производная обозначается $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ или f''_{yx}.

Если частную производную $\frac{\partial z}{\partial y}$ продифференцировать еще раз по y, то получим частную производную второго порядка от функции z, взятую два раза по y. Эта производная обозначается $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ или f''_{yy}.

Производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ называют *смешанными*.