2.1.75. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1x_2^2x_3^3 = 2, \\ x_1^2x_2^3x_3^4 = 4, \\ x_1^2x_2x_3 = 2. \end{cases}$$

2.1.76. Система

$$\begin{cases} ay + bx = c, \\ cx + az = b, \\ bz + cy = a. \end{cases}$$

имеет единственное решение. Доказать, что $abc \neq 0$, и решить систему.

2.1.77. Система линейных уравнений записана в матричной форме: $AX = B$. Известны два частных решения этой системы X_1 и X_2. Как выглядит система, имеющая одним из решений:

а) $X_1 + X_2$;

б) λX_1 (λ — некоторое число)?

Исследовать систему уравнений и найти общее решение в зависимости от параметров a, b, c, d:

2.1.78*. $\begin{cases} x + y + z = 1, \\ ax + by + cz = d, \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2. \end{cases}$ **2.1.79*.** $\begin{cases} ax + y + z = a, \\ x + by + z = b, \\ x + y + cz = c. \end{cases}$

§ 2. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ. ФОРМУЛЫ КРАМЕРА

Пусть система из n линейных уравнений с n неизвестными записана в матричной форме:

$$AX = B,$$

где $A = (a_{ij})$ — матрица коэффициентов системы размера $n \times n$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ — столбец неизвестных, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ — столбец свободных членов.

Если D — определитель матрицы A — не равен нулю, то система совместна и определенна, ее решение задается формулой:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Другую форму записи этого утверждения дают *формулы Крамера*:

$$x_k = \frac{D_k}{D}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

где D_k — определитель, получающийся из D заменой k-го столбца на столбец свободных членов.

2.2.1. Решить систему уравнений по формулам Крамера и с помощью обратной матрицы: $\begin{cases} x_1 - x_2 = -1, \\ 2x_1 + x_2 = 7. \end{cases}$

◐ а) Решим систему по формулам Крамера. Для этого найдем определитель матрицы системы:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 2 = 3.$$

Так как $D \neq 0$, то решение системы существует и единственно.

Найдем определитель D_1, подставляя в определитель D вместо первого столбца $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ столбец свободных членов $\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$:

$$D_1 = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 - (-1) \cdot 7 = 6.$$

Определитель D_2 получается из D подстановкой столбца свободных членов $\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$ вместо второго столбца $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 - (-1) \cdot 2 = 9.$$

Отсюда получим решение системы уравнений:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{6}{3} = 2; \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{9}{3} = 3.$$

Ответ. $(2; 3)$.

б) Решим систему с помощью обратной матрицы. Найдем матрицу A^{-1}, обратную к матрице системы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ методом присоединенной матрицы.

Так как $\det A = 3 \neq 0$, то матрица A^{-1} существует, поэтому решение системы существует и единственно.

Найдем алгебраические дополнения к элементам матрицы A:

$$A_{11} = 1, \quad A_{12} = -2, \quad A_{21} = -(-1) = 1; \quad A_{22} = 1.$$

Составим матрицу (A_{ij}) из алгебраических дополнений:

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Запишем матрицу $\widetilde{A} = (A_{ij})^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Найдем матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \widetilde{A} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Найдем решение системы уравнений:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \cdot (-1) + \frac{1}{3} \cdot 7 \\ -\frac{2}{3} \cdot (-1) + \frac{1}{3} \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $(2; 3)$.

Сравните решение примера 2.2.1 способами а) и б) с решением примера 2.1.1. ●

2.2.2. Решить систему уравнений по формулам Крамера и с помощью обратной матрицы: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 9, \\ 7x_1 + 8x_2 \qquad = -6. \end{cases}$

❍ а) Решим систему по формулам Крамера. Для этого найдем определитель матрицы системы:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 27 \quad \text{(см. пример 1.4.1).}$$

Так как $D \neq 0$, то решение системы существует и единственно. Найдем определители D_1, D_2 и D_3 подставляя столбец свободных членов $\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}$ вместо первого, второго и третьего столбцов определителя Δ соответственно:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 9 & 5 & 6 \\ -6 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 5 \\ -6 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 6 \cdot (-48) - 2 \cdot 36 + 3 \cdot (72 + 30) =$$

$$- 288 - 72 + 306 = -360 + 306 = -54,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&6&3\\4&9&6\\7&-6&0\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}9&6\\-6&0\end{vmatrix}-6\cdot\begin{vmatrix}4&6\\7&0\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix}4&9\\7&-6\end{vmatrix}=$$

$$=1\cdot 36-6\cdot(-42)+3\cdot(-24-63)=36+252+3\cdot(-87)=$$

$$=288-261=27,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&2&6\\4&5&9\\7&8&-6\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}5&9\\8&-6\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}4&9\\7&-6\end{vmatrix}+6\cdot\begin{vmatrix}4&5\\7&8\end{vmatrix}=$$

$$=1\cdot(-30-72)-2\cdot(-24-63)+6\cdot(32-35)=$$

$$=-102-2\cdot(-87)+6\cdot(-3)=-102+174-18=54.$$

Отсюда получим решение системы уравнений:

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-54}{27}=-2,$$

$$x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{27}{27}=1,$$

$$x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{54}{27}=2.$$

Ответ. $(-2;1;2)$.

б) Решим систему с помощью обратной матрицы. Найдем матрицу A^{-1}, обратную к матрице системы $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&0\end{pmatrix}$.

Эта матрица найдена в примере 1.4.1:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{16}{9}&\frac{8}{9}&-\frac{1}{9}\\\frac{14}{9}&-\frac{7}{9}&\frac{2}{9}\\-\frac{1}{9}&\frac{2}{9}&-\frac{1}{9}\end{pmatrix}.$$

Найдем решение системы уравнений:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=X=A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix}-\frac{16}{9}&\frac{8}{9}&-\frac{1}{9}\\\frac{14}{9}&-\frac{7}{9}&\frac{2}{9}\\-\frac{1}{9}&\frac{2}{9}&-\frac{1}{9}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\9\\-6\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}(-16\cdot 6+8\cdot 9-1\cdot(-6))/9\\(14\cdot 6-7\cdot 9+2\cdot(-6))/9\\(-1\cdot 6+2\cdot 9-1\cdot(-6))/9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-96+72+6)/9\\(84-63-12)/9\\(-6+18+6)/9\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{18}{9}\\\frac{9}{9}\\\frac{18}{9}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}.$$

Итак, $x_1=-2$, $x_2=1$, $x_3=2$ (как и при решении по формулам Крамера). ●

2.2.3. Решить систему уравнений по формулам Крамера и с помощью обратной матрицы: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 15, \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 24. \end{cases}$

○ Найдем определитель матрицы системы:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (45 - 48) - 2 \cdot (36 - 42) + 3 \cdot (32 - 35) =$$

$$= -3 - 2 \cdot (-6) + 3 \cdot (-3) = -3 + 12 - 9 = 0.$$

Так как $D = 0$, то система не может быть решена ни по формулам Крамера ни с помощью обратной матрицы. При этом система является совместной (например, есть решение (1;1;1)) и неопределенной.

Ответ. по формулам Крамера и с помощью обратной матрицы систему решить нельзя. ●

Найти решения линейной системы уравнений, используя обратную матрицу и формулы Крамера. Указать те значения параметров (a и b), при которых указанными методами систему решить невозможно:

2.2.4. $\begin{cases} x_1 - x_2 = -4, \\ 2x_1 + x_2 = -5. \end{cases}$

2.2.5. $\begin{cases} \sqrt{3}x_1 + 2x_2 = 11, \\ 4x_1 - \sqrt{3}x_2 = 0. \end{cases}$

2.2.6. $\begin{cases} 2ax - 3by = 0, \\ 3ax - 6by = ab. \end{cases}$

2.2.7. $\begin{cases} ax + by = f_1, \\ cx + dy = f_2. \end{cases}$

2.2.8. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 5, \\ 4x + 5y + 6z = 8, \\ 7x + 8y = 2. \end{cases}$

2.2.9. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14, \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 = -18. \end{cases}$

2.2.10. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 = 5. \end{cases}$

2.2.11. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 6, \\ 3x_1 + 10x_2 + 8x_3 = 21. \end{cases}$

2.2.12. $\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + ax_2 + x_3 = a, \\ x_1 + x_2 + ax_3 = a^2. \end{cases}$

2.2.13. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0, \\ -3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 3x_4 = -2, \\ -5x_1 + 7x_2 - 7x_3 + 5x_4 = -2, \\ 8x_1 - 8x_2 + 5x_3 - 6x_4 = -5. \end{cases}$

2.2.14. $\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 7x_4 = 28, \\ 5x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 8x_4 = 36, \\ 9x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 42, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2. \end{cases}$

2.2.15. $\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0, \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

Дополнительные задачи

2.2.16. Найти неизвестные коэффициенты многочлена $f(x) = ax^2 + bx + c$, удовлетворяющего условиям:

$$f(-2) = -8, \qquad f(1) = 4, \qquad f(2) = -4.$$

2.2.17. Найти неизвестные коэффициенты функции $f(x) = a \cdot 3^x + bx^2 + c$, удовлетворяющей условиям:

$$f(0) = 2, \qquad f(1) = -1, \qquad f(2) = 4.$$

Решить системы уравнений по формулам Крамера и с помощью обратной матрицы:

2.2.18. $\begin{cases} x_1 - x_2 = 5, \\ 2x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$

2.2.19. $\begin{cases} x_1 - \sqrt{5}\, x_2 = 0, \\ 2\sqrt{5}\, x_1 - 5x_2 = -10. \end{cases}$

2.2.20. $\begin{cases} \alpha x - y = 2, \\ 2x + \alpha y = 1. \end{cases}$

2.2.21. $\begin{cases} ax + 3by = 1, \\ bx + 3ay = 1. \end{cases}$

2.2.22. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 8, \\ 4x + 5y + 6z = 19, \\ 7x + 8y = 1. \end{cases}$

2.2.23. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 = -6, \\ 3x_1 + 10x_2 + 8x_3 = -8. \end{cases}$

2.2.24. $\begin{cases} 3x + 2y + z = 1, \\ 6x + 5y + 4z = -2, \\ 9x + 8y + 7z = 3. \end{cases}$

2.2.25. $\begin{cases} 3x + 2y + z = -8, \\ 2x + 3y + z = -3, \\ 2x + y + 3z = -1. \end{cases}$

2.2.26. $\begin{cases} ax + by + z = 1, \\ x + aby + z = b, \\ x + by + az = 1. \end{cases}$

2.2.27. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

2.2.28. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -13, \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 = -1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 11, \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 19. \end{cases}$$

2.2.29. $$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -15, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 = -6, \\ 3x_1 + x_3 + 2x_4 = 11. \end{cases}$$

2.2.30. Найти неизвестные коэффициенты многочлена $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$, удовлетворяющего условиям:

$$f(-1) = 3, \qquad f(1) = 1, \qquad f(2) = -15.$$

2.2.31. Найти неизвестные коэффициенты функции $f(x) = a\log_3 x + bx + c$, удовлетворяющей условиям:

$$f(1) = 5, \qquad f(3) = 8, \qquad f(9) = 19.$$

Контрольные вопросы и более сложные задачи

Ответы к задачам 2.2.32–2.2.35 проиллюстрируйте примерами.

2.2.32. Могут ли различные методы решения системы линейных уравнений (метод Крамера и метод обратной матрицы) дать различные ответы?

2.2.33. Возможно ли, чтобы система линейных уравнений имела решение с помощью метода Гаусса, но не имела решения по формулам Крамера?

2.2.34. Совместная система n линейных уравнений с n неизвестными записана в матричной форме: $AX = B$. Будут ли решениями системы оба набора из n чисел: $A^{-1}B$ и $B^T A^{-1}$?

2.2.35. В системе n линейных уравнений с n неизвестными поменяли местами два уравнения. Изменятся ли формы записи решения с помощью обратной матрицы и по формулам Крамера? Изменится ли общее решение?

2.2.36. Доказать, что формулы Крамера являются другой формой записи решения $X = A^{-1}B$ системы линейных уравнений $AX = B$.

2.2.37. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1, \\ a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1^{n-1}x_1 + a_2^{n-1}x_2 + \ldots + a_n^{n-1}x_n = b^{n-1} \end{cases}$$

(все числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ различны).