2.2.38. Пусть $(x_1, \dots, x_n)$ и $(y_1, \dots, y_n)$ — единственные решения систем линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n = c_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n = c_n. \end{cases}$$

Доказать, что $c_1x_1 + \ldots + c_nx_n = b_1y_1 + \ldots + b_ny_n$. Записать это число в виде определителя.

§ 3. ОДНОРОДНЫЕ И НЕОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть дана однородная система линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

или в матричной форме $AX = 0$.

Однородная система всегда совместна, так как существует *тривиальное* решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Однородная система неопределенна тогда и только тогда, когда $r(A) < n$.

Положим $r = r(A)$. Пусть общее решение системы (3.1) записано в виде

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t_1, \dots, t_{n-r}) \\ \vdots \\ x_r(t_1, \dots, t_{n-r}) \\ t_1 \\ \vdots \\ t_{n-r} \end{pmatrix},$$

где $x_1, \dots, x_r$ — главные переменные, $t_1, \dots, t_{n-r}$ — значения свободных переменных $x_{r+1}, \dots, x_n$. Выберем $n - r$ решений системы (3.1), полученных из общего решения слѐдующим образом: одно из значений свободных переменных полагается равным 1, а остальные — равными 0:

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1(1,0,...,0) \\ \vdots \\ x_r(1,0,...,0) \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} x_1(0,1,...,0) \\ \vdots \\ x_r(0,1,...,0) \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ ..., X_{n-r} = \begin{pmatrix} x_1(0,0,...,1) \\ \vdots \\ x_r(0,0,...,1) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Эти решения образуют *нормальную фундаментальную систему решений* однородной системы (3.1). Они обладают следующим свойством:

Любое решение X системы (3.1) может быть единственным образом представлено в виде:

$$X = \alpha_1 X_1 + \ldots + \alpha_{n-r} X_{n-r},$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-r}$ — некоторые числа.

$\Rrightarrow$ Любой набор из $n-r$ решений системы (3.1), обладающих указанным свойством, называется *фундаментальной системой решений* системы (3.1).

Набор из $n-r$ произвольных решений системы (3.1) —

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ \ldots \\ x_n^{(1)} \end{pmatrix}, \; X_2 = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ \ldots \\ x_n^{(2)} \end{pmatrix}, \; \ldots, \; X_{n-r} = \begin{pmatrix} x_1^{(n-r)} \\ \ldots \\ x_n^{(n-r)} \end{pmatrix}$$

образует фундаментальную систему решений тогда и только тогда, когда матрица, составленная из их компонентов $\begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \ldots & x_1^{(n-r)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{(1)} & \ldots & x_n^{(n-r)} \end{pmatrix}$ имеет ранг $n-r$.

Пусть дана некоторая неоднородная система линейных уравнений

$$AX = B, \tag{3.2}$$

а $AX = 0$ (система (3.1)) — соответствующая ей однородная система. Общее решение системы (3.2) может быть представлено в виде суммы общего решения системы (3.1) и какого-то одного (частного) решения системы (3.2).

2.3.1. Найти общее решение и фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 = 0. \end{cases}$$

◐ Запишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \mathrm{II} - 2\cdot\mathrm{I} \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{array}\right).$$

Так как столбец свободных членов при всех элементарных преобразованиях не изменяется, его можно не писать и ограничиться матрицей системы A:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mathrm{II} - 2\cdot\mathrm{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Однородная система совместна всегда, т. е. ранг $r(A)$ матрицы A однородной системы всегда равен рангу $r(A|B)$ расширенной матрицы $(A|B)$, в данном примере $r(A) = r(A|B) = 2$. Количество переменных n также равно 2:

$$n = r(A) = r(A|B) = 2,$$

значит, система определенна, т. е. имеет единственное (очевидно, тривиальное — нулевое) решение.

Подробнее, запишем систему, соответствующую полученной матрице:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0, \\ 7x_2 = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения получим $x_2 = 0$. Подставляя это значение в первое уравнение, получим $x_1 = 0$.

Ответ. общее решение $(0; 0)$. ●

2.3.2. Найти общее решение и фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

◐ Запишем матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathrm{II} - 2 \cdot \mathrm{I} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \mathrm{II} : 3 \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Так как

$$r(A) = r(A|B) = 2 < 3 = n,$$

то система неопределенна. Количество главных переменных равно $r(A) = 2$, количество свободных переменных равно $n - r(A) = 3 - 2 = 1$. Для определения главных переменных выберем какой-нибудь не равный нулю минор второго порядка полученной матрицы A, например, минор $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$. Его столбцы — 1-й и 2-й столбцы матрицы A — соответствует переменным x_1 и x_2 — это будут *главные переменные*, а x_3 — *свободная переменная*. Заметим, что в качестве главных переменных в данном примере нельзя выбрать пару x_2 и x_3, так как соответствующий им минор равен нулю: $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$.

Запишем систему, соответствующую полученной матрице:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения, выражая x_2 через x_3, получим $x_2 = x_3$; подставляя это выражение в первое уравнение, получим $x_1 = 0$.

Обозначив свободную переменную через t, получим *общее решение системы*: $(0; t; t) = t \cdot (0; 1; 1)$. ***Фундаментальную систему решений*** образует, например, решение $\{(0; 1; 1)\}$.

Ответ. общее решение системы $(0; t; t)$; фундаментальная система решений $(0; 1; 1)$. ●

2.3.3. Найти общее решение и фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений: (см. задачу 2.1.3)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 6x_1 - 3x_2 - 3x_3 - x_4 = 0, \\ -7x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ -3x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 0. \end{cases}$$

◐ Приведем матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 6 & -3 & -3 & -1 \\ -7 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & 9 & 9 & 10 \end{pmatrix} \underset{\text{(см. 2.1.3)}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 15 & 15 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как

$$r(A) = r(A|B) = 2 < 4 = n,$$

то система неопределенна. В качестве главных переменных можно выбрать x_1 и x_2, соответствующие столбцам ненулевого минора второго порядка: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 15 \end{vmatrix}$; в качестве свободных переменных — x_3 и x_4.

Запишем систему, соответствующую полученной матрице:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 15x_2 + 15x_3 + 19x_4 = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения, выражая x_2 через x_3 и x_4, получим $x_2 = -x_3 - \frac{19}{15}x_4$. Подставляя это выражение в первое уравнение, получим $x_1 = -\frac{7}{15}x_4$. Обозначая свободные переменные — x_3 через t_1, x_4 через $15t_2$ запишем *общее решение системы*: $(-7t_2; -t_1 - 19t_2; t_1; 15t_2) = t_1(0; -1; 1; 0) + t_2(-7; -19; 0; 15)$. ***Фундаментальную систему решений*** образует, например, пара решений $(0; -1; 1; 0)$ и $(-7; -19; 0; 15)$.

Ответ. Общее решение системы $(-7t_2; -t_1 - 19t_2; t_1; 15t_2)$; фундаментальная система решений $\{(0; -1; 1; 0),\ (-7; -19; 0; 15)\}$. ●

Найти общее решение и фундаментальную систему решений для однородной системы линейных алгебраических уравнений:

2.3.4. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$

2.3.5. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ -x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$

2.3.6. $\begin{cases} 2x - 3y = 0, \\ 4x - 6y = 0. \end{cases}$

2.3.7. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

2.3.8. $\begin{cases} x_1 - \sqrt{3}x_2 = 0, \\ \sqrt{3}x_1 - 3x_2 = 0, \\ -\sqrt{2}x_1 + \sqrt{6}x_2 = 0, \\ 2x_1 - \sqrt{12}x_2 = 0. \end{cases}$

2.3.9. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0, \\ -\sqrt{8}x_1 + \sqrt{2}x_2 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases}$

2.3.10. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

2.3.11. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0, \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 0. \end{cases}$

2.3.12. $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0, \\ -x_1 + x_3 - x_5 = 0, \\ -x_2 + x_4 - x_6 = 0, \\ -x_3 + x_5 = 0, \\ -x_4 + x_6 = 0. \end{cases}$

2.3.13. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 0, \\ -3x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 0. \end{cases}$

2.3.14. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ 6x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

2.3.15. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0, \\ 7x_1 + 8x_2 + 10x_3 = 0. \end{cases}$

2.3.16. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$

2.3.17. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + 10x_4 = 0. \end{cases}$

2.3.18. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 0, \\ 7x_1 + 10x_2 + x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$

Найти общее решение и фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений в зависимости от параметра λ:

2.3.19. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 11x_2 - 2\lambda x_3 = 0. \end{cases}$ **2.3.20.** $\begin{cases} 8x_1 + x_2 + 4x_3 = 0, \\ \lambda x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ \lambda^2 x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

В задачах 2.3.21–2.3.25 вектором $\bar{p}$ будем называть упорядоченный конечный набор чисел $\bar{p} = (p_1; p_2; \ldots; p_n)$; в этом случае числа $p_1, p_2, \ldots, p_n$ будем называть компонентами вектора $\bar{p}$ (подробнее — см. Главу 3).
Даны:
1) неоднородная система уравнений;
2) набор из трех векторов $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$;
3) несколько систем векторов — B_i.
Требуется:
***а)** Проверить, какие из трех векторов — $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ — являются решениями данной неоднородной системы уравнений.*
***б)** Выбрать те системы векторов B_i, которые образуют фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.*
***в)** Используя ответы к пунктам а) и б), записать общие решения данной неоднородной системы и соответствующей ей однородной системы уравнений.*

2.3.21. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$
$\bar{a}_1 = (1; -2; 3)$, $\bar{a}_2 = (1; 0; 1)$, $\bar{a}_3 = (5; 2; -1)$;
$B_1 = \{(-4; -2; 2), (2; 1; -1)\}$, $B_2 = \{(2; 1; -1), (1; 1; 0)\}$.

а) Подставляя в систему уравнений компоненты вектора $\bar{a}_1 = (1; -2; 3)$, получим два неверных равенства:

$$\begin{cases} 1 + 2 + 3 = 2, \\ 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 4. \end{cases}$$

Значит, набор значений $(1; -2; 3)$ не является решением данной системы.

Теперь убедимся, что компоненты вектора $\bar{a}_2 = (1; 0; 1)$ дают решение системы:

$$\begin{cases} 1 + 0 + 1 = 2, \\ 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 4. \end{cases}$$

Аналогично, компоненты вектора $\bar{a}_3 = (5; 2; -1)$ также представляют собой решение данной неоднородной системы уравнений (проверьте самостоятельно!).

б) Сначала выясним, из скольких решений состоит фундаментальная система решений однородной системы уравнений, соответствующей заданной неоднородной системе:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Найдем ранг матрицы A этой системы, для чего приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \mathrm{II} - 2 \cdot \mathrm{I} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Значит, $r(A) = 1$, и $n - r(A) - 3 - 1 = 2$, откуда следует, что любая фундаментальная система состоит из двух решений.

Нетрудно увидеть, что решениями указанной однородной системы уравнений являются все четыре вектора из систем B_1 и B_2 (проверьте самостоятельно!).

Два решения указанной однородной системы будут образовывать ее фундаментальную систему решений тогда и только тогда, когда они линейно независимы, т.е. матрица, составленная из их компонент, имеет ранг 2.

Составим матрицу из компонент векторов системы B_1 и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} 2 \cdot \mathrm{II} + \mathrm{I} \sim \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг этой матрицы равен 1, значит система B_1 не является фундаментальной системой решений однородной системы уравнений.

Исследуем систему векторов B_2. Составим матрицу из компонентов векторов из B_2 и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} 2 \cdot \mathrm{II} - \mathrm{I} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ранг этой матрицы равен 2, значит векторы из B_2 линейно независимы и образуют фундаментальную систему решений однородной системы уравнений.

в) Общее решение однородной системы может быть записано в виде линейной комбинации векторов $\bar{b}_1 = (2; 1; -1)$ и $\bar{b}_2 = (1; 1; 0)$, т.е. суммы вида

$$t_1 \cdot \bar{b}_1 + t_2 \cdot \bar{b}_2 = t_1 \cdot (2; 1; -1) + t_2 \cdot (1; 1; 0) =$$
$$= (2t_1; t_1; -t_1) + (t_2; t_2; 0) = (2t_1 + t_2; t_1 + t_2; -t_1),$$

где t_1 и t_2 — произвольные действительные числа.

Общее решение неоднородной системы уравнений может быть записано в виде суммы одного (частного) решения этой системы и общего решения соответствующей однородной системы уравнений. Так как и вектор $\bar{a}_2$ и вектор $\bar{a}_3$ являются решениями неоднородной системы, то ее общее решение мы можем записать двумя способами:

$$\bar{a}_2 + t_1\bar{b}_1 + t_2\bar{b}_2 = (1;0;1) + (2t_1 + t_2; t_1 + t_2; -t_1) = \\ = (1 + 2t_1 + t_2; t_1 + t_2; 1 - t_1)$$

или

$$\bar{a}_3 + t_1\bar{b}_1 + t_2\bar{b}_2 = (5;2;-1) + (2t_1 + t_2; t_1 + t_2; -t_1) = \\ = (5 + 2t_1 + t_2; 2 + t_1 + t_2; -1 - t_1).$$

Ответ. **а)** $\bar{a}_2$ и $\bar{a}_3$; **б)** B_2; **в)** общее решение однородной системы $(2t_1 + t_2; t_1 + t_2; -t_1)$; общее решение неоднородной системы $(1+2t_1+t_2; t_1+t_2; 1-t_1)$ или $(5+2t_1+t_2; 2+t_1+t_2; -1-t_1)$. ●

2.3.22. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4, \\ -2x_1 - 4x_2 = -8. \end{cases}$
$\bar{a}_1 = (0;2)$, $\bar{a}_2 = (-2;3)$, $\bar{a}_3 = (2;-1)$;
$B_1 = \{(2;1),(2;-1)\}$, $B_2 = \{(2;-1)\}$, $B_3 = \{(2;1)\}$.

2.3.23. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 8, \\ 4x_1 - 5x_2 - 6x_3 = 1. \end{cases}$
$\bar{a}_1 = (-3;2;-1)$, $\bar{a}_2 = (0;0;0)$, $\bar{a}_3 = (1;2;1)$;
$B_1 = \{(0;0;0)\}$, $B_2 = \{(1;2;1)\}$, $B_3 = \{(13;2;7)\}$.

2.3.24. $\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2. \end{cases}$
$\bar{a}_1 = (1;1;1)$, $\bar{a}_2 = (0;0;1)$, $\bar{a}_3 = (0;1;0)$;
$B_1 = \{(1;1;2),(0;1;1),(2;-1;0)\}$, $B_2 = \{(1;0;1),(0;1;1)\}$,
$B_3 = \{(2;-1;1),(-1;2;1)\}$.

2.3.25. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1, \\ 8x_1 - 5x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 2, \\ 12x_1 - 7x_2 - 9x_3 + 5x_4 = 3. \end{cases}$
$\bar{a}_1 = (-1;-2;1;2)$, $\bar{a}_2 = (2;-2;5;2)$, $\bar{a}_3 = (-4;-2;-3;2)$;
$B_1 = \{(3;0;4;0),(1;-2;4;-3)\}$, $B_2 = \{(-1;-1;-1;3)\}$,
$B_3 = \{(3;0;4;0)\}$.

Дополнительные задачи

Найти общее решение и фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений:

2.3.26. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0, \\ -4x_1 + 2x_2 = 0. \end{cases}$

2.3.27. $\begin{cases} x - \sqrt{3}\,y = 0, \\ \sqrt{3}\,x - 3y = 0. \end{cases}$

2.3.28. $\begin{cases} 3x + 4y = 0, \\ 4x - 3y = 0. \end{cases}$

2.3.29. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0, \\ -\sqrt{3}\,x_1 - \sqrt{12}\,x_2 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 = 0. \end{cases}$

2.3.30. $\begin{cases} 2x - y - z = 0, \\ 4x - 2y - 2z = 0. \end{cases}$

2.3.31. $\begin{cases} 2x - y - z = 0, \\ x + 2y + 3z = 0. \end{cases}$

2.3.32. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

2.3.33. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 - 3x_2 - 8x_3 = 0. \end{cases}$

2.3.34. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$

2.3.35. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 + 8x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$

2.3.36. $\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

2.3.37. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 5x_4 = 0. \end{cases}$

2.3.38. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$

2.3.39. $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 0, \\ 7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$

Найти общее решение и фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений в зависимости от параметра:

2.3.40. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 7x_3 = 0, \\ x_1 + ax_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

2.3.41. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 0, \\ 5x_1 + 6x_2 - 4x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 - \lambda x_3 = 0. \end{cases}$

Контрольные вопросы и более сложные задачи

Ответы к задачам 2.3.42–2.3.56 проиллюстрируйте примерами.

2.3.42. Может ли количество решений, составляющих фундаментальную систему решений, быть больше числа неизвестных? меньше? равно?

2.3.43. Может ли частное решение однородной (неоднородной) системы линейных уравнений быть ее общим решением?

2.3.44. Может ли однородная система линейных уравнений иметь ровно одно решение? ровно два? ровно 17?

2.3.45. Фундаментальные системы решений двух однородных систем линейных уравнений совпадают. Равны ли матрицы однородных систем? Равны ли ранги этих матриц?

2.3.46. У двух неоднородных систем линейных уравнений есть общее частное решение и у соответствующих им однородных систем совпадают фундаментальные системы решений. Равны ли расширенные матрицы неоднородных систем? Совпадают ли их общие решения?

2.3.47. Следует ли, что система линейных уравнений является однородной, из того, что сумма любых двух решений системы также является ее решением?

2.3.48. Верно ли, что сумма (разность) двух любых решений системы линейных уравнений также является ее решением, если система:

а) однородна;

б) неоднородна?

2.3.49. Может ли у неоднородной системы линейных уравнений быть фундаментальная система решений?

2.3.50. Может ли у однородной системы линейных уравнений не быть фундаментальной системы решений?

2.3.51. Верно ли, что произведение решения системы линейных уравнений на любое число также является ее решением, если система:

а) однородна;

б) неоднородна?