ТЕМА II. ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

ЛИТЕРАТУРА: *Н. С. Пискунов.* Дифференциальное и интегральное исчисления (любое издание), гл. VIII, §17—19.

Контрольные вопросы для самопроверки

1. Дайте определение максимума (минимума) функции двух переменных.
2. Сформулируйте необходимые условия экстремума функции двух переменных. Укажите геометрический смысл необходимого признака экстремума функции двух переменных.
3. Какие точки называются критическими и как они находятся?
4. Сформулируйте достаточные условия экстремума функции двух независимых переменных.
5. Укажите способ отыскания наибольшего и наименьшего значения функции двух переменных в заданной замкнутой области.
6. Дайте определение производной в данном направлении.
7. Что называется градиентом функции двух переменных? трех переменных? Укажите свойства градиента функции.
8. Напишите уравнение касательной плоскости и уравнения нормали к поверхности в данной точке.
9. В чем сущность подбора эмпирических формул по способу наименьших квадратов?

§ 13. ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Функция $z=f(x, y)$ имеет максимум в точке $P_0(x_0, y_0)$, если существует такая окрестность этой точки, в которой имеет место неравенство.

$$f(x_0, y_0)>f(x, y). \tag{1}$$

На рис. 6 изображена поверхность функции $z=f(x, y)$ в окрестности точки максимума. Точка M_0 имеет наибольшую аппликату по сравнению с другими точками, расположенными на поверхности в достаточной близости от нее.

Функция $z=f(x, y)$ имеет минимум в точке $P_0(x_0, y_0)$, если существует такая окрестность этой точки, в которой имеет место неравенство

$$f(x_0, y_0)<f(x, y). \qquad (2)$$

На рис. 7 изображена поверхность функции $z=f(x, y)$ в окрестности точки минимума. Точка M_0 имеет наименьшую аппликату по сравнению с другими точками, расположенными на поверхности в достаточной близости от нее. Точки максимума и минимума называют также точками экстремума, а значения функции в этих точках называют экстремальными.

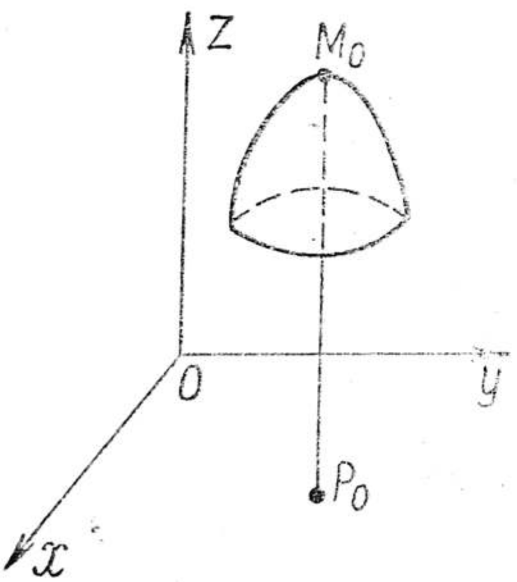

Рис. 6

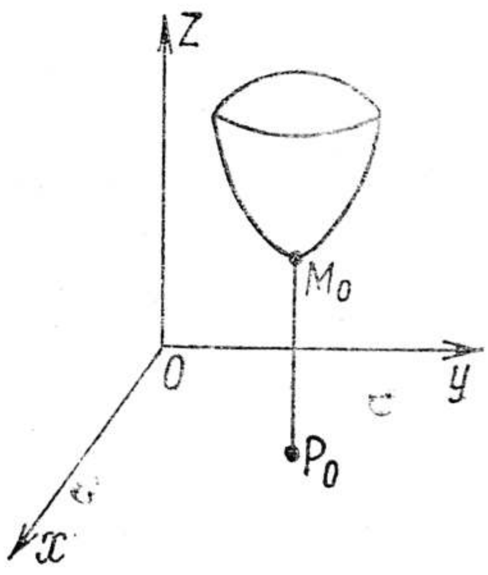

Рис. 7

Сформулируем необходимые условия, при которых функция $z=f(x, y)$ достигает экстремума. Если дифференцируемая функция $z=f(x, y)$ имеет экстремум в точке $P_0(x_0, y_0)$, то ее частные производные в этой точке равны нулю, то есть

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{P_0}=0; \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{P_0}=0. \qquad (3)$$

Точки, при которых $\frac{\partial z}{\partial x}=0$ и $\frac{\partial z}{\partial y}=0$, называются стационарными точками функции $z=f(x, y)$.

Условия (3) имеют следующий геометрический смысл: в стационарной точке касательная плоскость к поверхности $z=f(x, y)$ параллельна плоскости xOy.

Действительно, пусть $P_0(x_0, y_0)$ есть стационарная точка функции $z=f(x, y)$. Уравнение касательной плоскости в этой точке имеет вид

$$z-z_0=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{P_0}(x-x_0)+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{P_0}(y-y_0).$$

Так как частные производные равны нулю, то получаем $z-z_0=0$, $z=z_0$. Для отыскания стационарных точек функции $z=f(x, y)$ надо найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, приравнять каждую из них нулю и решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0. \end{cases} \tag{4}$$

112. Найти стационарные точки функции

$$z=x^2+y^2-4x-6y+17.$$

Решение. Находим частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x-4; \quad \frac{\partial z}{\partial y}=2y-6.$$

Решение системы $\begin{cases} 2x-4=0 \\ 2y-6=0 \end{cases}$ дает $x=2$ и $y=3$.

Следовательно, $P_0(2, 3)$ — стационарная точка данной функции. Следует иметь в виду, что не все стационарные точки обязательно являются точками экстремума, так как условия (3) — только необходимые, но отнюдь недостаточные для наличия экстремума.

Например, точка $P_0(0, 0)$ является стационарной точкой для функции $z=x^2-y^2$ (гиперболический параболоид), но в этой точке нет ни максимума, ни минимума.

Для исследования функции $z=f(x, y)$ на экстремум сформулируем достаточные условия. Пусть $P_0(x_0, y_0)$ является стационарной точкой функции $z=f(x, y)$, имеющей непрерывные частные производные первого и второго порядков в этой точке. Значения производных второго порядка в точке P_0 обозначим так:

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{P_0}=A; \quad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)_{P_0}=B; \quad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{P_0}=C.$$

Составим определитель $\Delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=AC-B^2.$

Если $\Delta<0$, то в стационарной точке P_0 нет экстремума. Если $\Delta>0$, то в точке P_0 есть экстремум, причем максимум, если $A<0$, и минимум, если $A>0$.
Если $\Delta=0$, то требуется дополнительное исследование. В этом случае используют неравенства (1) и (2).

113. Исследовать на экстремум функцию $z=3x+6y-x^2-xy-y^2$.

Решение. Находим частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, каждую из них приравниваем нулю и решаем систему (4).

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3-2x-y; \quad \frac{\partial z}{\partial y}=6-x-2y.$$

Решая систему $\begin{cases} 3-2x-y=0, \\ 6-x-2y=0, \end{cases}$ находим $x=0$ и $y=3$.

Следовательно, $P_0(0, 3)$ есть стационарная точка функции z. Находим частные производные второго порядка и их значения в найденной стационарной точке P_0.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-1; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2.$$

В данном случае производные второго порядка постоянны. Имеем: $A=-2$; $B=-1$; $C=-2$. $\Delta=4-1=3>0$.

Так как $\Delta>0$ и $A<0$, то в точке $P_0(0, 3)$ функция имеет максимум.

$$z_{\max}=18-9=9.$$

114. Исследовать на экстремум функцию $z=x^3+y^3-6xy$.

Решение. Находим стационарные точки. Для этого составим и решим систему (4).

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2-6y; \quad \frac{\partial z}{\partial y}=3y^2-6x.$$

$$\begin{cases} 3x^2-6y=0, \\ 3y^2-6x=0. \end{cases}$$

Решив эту систему, получаем две стационарные точки: $P_1(0, 0)$ и $P_2(2;\ 2)$. Находим частные производные второго порядка.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=-6;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6y. \qquad (*)$$

Исследуем сначала точку $P_1(0, 0)$. При $x=0$ и $y=0$ имеем: $A=0$; $B=-6$; $C=0$. Тогда $\Delta=AC-B^2=-36<0$. Так как $\Delta<0$, то в исследуемой стационарной точке нет экстремума.

Исследуем точку $P_2(2;\ 2)$. Подставив в (*) $x=2$ и $y=2$, будем иметь: $A=12$; $B=-6$; $C=12$. В этом случае $\Delta=$ $=144-36=108>0$.

Так как $\Delta>0$ и $A>0$, то в исследуемой точке имеется минимум.

$$z_{\min}=z(2, 2)=8+8-24=-8.$$

115. Исследовать на экстремум функцию

$$z=2x^3+xy^2+5x^2+.y^2+1.$$

Решение. Находим стационарные точки.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=6x^2+y^2+10x;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=2xy+2y;$$

$$\begin{cases} 6x^2+y^2+10x=0 \\ 2xy+2y=0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 6x^2+y^2+10x=0 \\ 2y(x+1)=0. \end{cases}$$

Решение последней системы дает 4 стационарные точки:

$$P_1(0,0), P_2\left(-\frac{5}{3},\ 0\right),\ P_3(-1,\ 2) \text{ и } P_4(-1,\ -2).$$

Находим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12x+10;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=2y;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2x+2.$$

Исследуем каждую стационарную точку.

1) В точке $P_1(0,\ 0)$: $A=10$; $B=0$; $C=2$; $\Delta=20$. Так как $\Delta>0$ и $A>0$, то в этой точке функция имеет минимум.

$$z_{\min}=z(0,\ 0)=1.$$

2) В точке $P_2(-\frac{5}{3}, 0)$: $A=-10$; $B=0$; $C=-\frac{4}{3}$; $\Delta=\frac{40}{3}$. Так как $\Delta>0$ и $A<0$, то в этой точке функция имеет максимум.

$$z_{max}=z(-\frac{5}{3}, 0)=-\frac{250}{27}+\frac{125}{9}+1=5\frac{17}{27}.$$

3) В точке P_3 $(-1, 2)$: $A=-2$; $B=4$; $C=0$; $\Delta=-16$. Так как $\Delta<0$, то в этой точке нет экстремума.

4) В точке $P_4(-1, -2)$: $A=-2$; $B=-4$; $C=0$; $\Delta=-16$. Так как $\Delta<0$, то в этой точке нет экстремума.

116. Исследовать на экстремум следующие функции:

а) $z=4x-4y-x^2-y^2$;

б) $z=x^2-xy+y^2+9x-6y+20$;

в) $z=3x+6y-x^2-xy-y^2$;

г) $z=x^3+8y^3-6xy+1$;

д) $z=x^3+y^3-3xy$;

е) $z=x^3+3xy^2-15x-12y$.

§ 14. ОТЫСКАНИЕ НАИБОЛЬШЕГО И НАИМЕНЬШЕГО ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ В ЗАДАННОЙ ЗАМКНУТОЙ ОБЛАСТИ

Пусть требуется найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=f(x, y)$ в некоторой замкнутой области D. Этих значений функция достигает либо во внутренних точках области, которые являются стационарными точками функции, либо на границах области. Следовательно, чтобы найти наибольшее и наименьшее значение функции в заданной замкнутой области, необходимо:

1) найти стационарные точки, лежащие внутри области, и вычислить значения функции в этих точках; исследовать на экстремум эти точки нет необходимости;

2) найти наибольшее и наименьшее значение функции на границе области; если граница области состоит из нескольких линий (участков), то исследование проводится для каждого участка в отдельности;