Таким образом, наибольший объем имеет куб с ребром, равным $\sqrt{S/6}$. ◄

АЗ-10.4

1. Исследовать данные функции на локальный экстремум:

а) $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$;
б) $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$;
в) $z = 3xy - x^2 - y^2 - 10x + 5y$.

(*Ответ:* а) $z_{\min} = z(2, 1) = -28$, $z_{\max} = z(-2, -1) = 28$; б) $z_{\min} = z(1, 0) = -1$; в) точек экстремума нет.)

2. Найти экстремумы функции $z = x + 2y$ при условии $x^2 + y^2 = 5$. (*Ответ:* $z_{\min} = -5$ при $x = -1$, $y = -2$; $z_{\max} = 5$ при $x = 1$, $y = 2$.)

3. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x + 5$ в области, ограниченной прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 3$. (*Ответ:* $z_{\text{наим}} = z(3, 0) = -9$, $z_{\text{наиб}} = z(0, 0) = 5$.)

4 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2y(4 - x - y)$ в области, ограниченной прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$. (*Ответ:* $z_{\text{наим}} = z(4, 2) = -64$, $z_{\text{наиб}} = z(2, 1) = 4$.)

5. Определить размеры прямоугольного параллелепипеда данного объема V, имеющего поверхность наименьшей площади. (*Ответ:* куб с ребром, равным $\sqrt[3]{V}$.)

Самостоятельная работа

1. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^2 - 3x + 2y$. (*Ответ:* $z_{\min} = z(1, -1) = -3$.)

2. Исследовать на экстремум функцию $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$. (*Ответ:* $z_{\max} = z(4, 4) = 15$.)

3. Исследовать на экстремум функцию $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$. (*Ответ:* $z_{\min} = z(0, -2/3) = -4/3$.)

10.5. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ К ГЛ. 10

ИДЗ-10.1

1. Найти область определения указанных функций.

1.1. $z = 3xy/(2x - 5y)$. **1.2.** $z = \arcsin(x - y)$.

1.3. $z = \sqrt{y^2 - x^2}$. **1.4.** $z = \ln(4 - x^2 - y^2)$.

1.5. $z = 2/(6 - x^2 - y^2)$. **1.6.** $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 5}$.

1.7. $z = \arccos(x+y)$.
1.8. $z = 3x + y/(2 - x + y)$.
1.9. $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.
1.10. $z = \ln(x^2 + y^2 - 3)$.
1.11. $z = \sqrt{2x^2 - y^2}$.
1.12. $z = 4xy/(x - 3y + 1)$.
1.13. $z = \sqrt{xy}/(x^2 + y^2)$.
1.14. $z = \arcsin(x/y)$.
1.15. $z = \ln(y^2 - x^2)$.
1.16. $z = x^3y/(3 + x - y)$.
1.17. $z = \arccos(x + 2y)$.
1.18. $z = \arcsin(2x - y)$.
1.19. $z = \ln(9 - x^2 - y^2)$.
1.20. $z = \sqrt{3 - x^2 - y^2}$.
1.21. $z = 1/\sqrt{x^2 + y^2 - 5}$.
1.22. $z = 4x + y/(2x - 5y)$.
1.23. $z = \sqrt{3x - 2y}/(x^2 + y^2 + 4)$.
1.24. $z = 5/(4 - x^2 - y^2)$.
1.25. $z = \ln(2x - y)$.
1.26. $z = 7x^3y/(x - 4y)$.
1.27. $z = \sqrt{1 - x - y}$.
1.28. $z = e^{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$.
1.29. $z = 1/(x^2 + y^2 - 6)$.
1.30. $z = 4xy/(x^2 - y^2)$.

2. Найти частные производные и частные дифференциалы следующих функций.

2.1. $z = \ln(y^2 - e^{-x})$.
2.2. $z = \arcsin\sqrt{xy}$.
2.3. $z = \operatorname{arctg}(x^2 + y^2)$.
2.4. $z = \cos(x^3 - 2xy)$.
2.5. $z = \sin\sqrt{y/x^3}$.
2.6. $z = \operatorname{tg}(x^3 + y^2)$.
2.7. $z = \operatorname{ctg}\sqrt{xy^3}$.
2.8. $z = e^{-x^2 + y^2}$.
2.9. $z = \ln(3x^2 - y^4)$.
2.10. $z = \arccos(y/x)$.
2.11. $z = \operatorname{arcctg}(xy^2)$.
2.12. $z = \cos\sqrt{x^2 + y^2}$.
2.13. $z = \sin\sqrt{x - y^3}$.
2.14. $z = \operatorname{tg}(x^3y^4)$.
2.15. $z = \operatorname{ctg}(3x - 2y)$.
2.16. $z = e^{2x^2 - y^3}$.
2.17. $z = \ln(\sqrt{xy} - 1)$.
2.18. $z = \arcsin(2x^3y)$.
2.19. $z = \operatorname{arctg}(x^2/y^3)$.
2.20. $z = \cos(x - \sqrt{xy^3})$.
2.21. $z = \sin\dfrac{x+y}{x-y}$.
2.22. $z = \operatorname{tg}\dfrac{2x - y^2}{x}$.
2.23. $z = \operatorname{ctg}\sqrt{\dfrac{x}{x-y}}$.
2.24. $z = e^{-\sqrt{x^2 + y^2}}$.
2.25. $z = \ln(3x^2 - y^2)$.
2.26. $z = \arccos(x - y^2)$.
2.27. $z = \operatorname{arcctg}\dfrac{x^3}{y}$.
2.28. $z = \cos\dfrac{x - y}{x^2 + y^2}$.
2.29. $z = \sin\sqrt{\dfrac{y}{x+y}}$.
2.30. $z = e^{-(x^3 + y^3)}$.

3. Вычислить значения частных производных $f'_x(M_0)$, $f'_y(M_0)$, $f'_z(M_0)$ для данной функции $f(x, y, z)$ в точке

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ с точностью до двух знаков после запятой.

3.1. $f(x, y, z) = z/\sqrt{x^2+y^2}$, $M_0(0, -1, 1)$. (*Ответ:* $f'_x(0, -1, 1) = 0$, $f'_y(0, -1, 1) = 1$, $f'_z(0, -1, 1) = 1$.)

3.2. $f(x, y, z) = \ln\left(x + \frac{y}{2z}\right)$, $M_0(1, 2, 1)$. (*Ответ:* $f'_x(1, 2, 1) = 0{,}5$, $f'_y(1, 2, 1) = 0{,}25$, $f'_z(1, 2, 1) = -0{,}5$.)

3.3. $f(x, y, z) = (\sin x)^{yz}$, $M_0\left(\frac{\pi}{6}, 1, 2\right)$. $\left(\textit{Ответ: } f'_x\left(\frac{\pi}{6}, 1, 2\right) = 0{,}87,\ f'_y\left(\frac{\pi}{6}, 1, 2\right) = -0{,}35,\ f'_z\left(\frac{\pi}{6}, 1, 2\right) = -0{,}17.\right)$

3.4. $f(x, y, z) = \ln(x^3 + 2y^3 - z^3)$, $M_0(2, 1, 0)$. (*Ответ:* $f'_x(2, 1, 0) = 1{,}2$, $f'_y(2, 1, 0) = 0{,}6$, $f'_z(2, 1, 0) = 0$.)

3.5. $f(x, y, z) = x/\sqrt{y^2+z^2}$, $M_0(1, 0, 1)$. (*Ответ:* $f'_x(1, 0, 1) = 1$, $f'_y(1, 0, 1) = 0$, $f'_z(1, 0, 1) = -1$.)

3.6. $f(x, y, z) = \ln\cos(x^2y^2 + z)$, $M_0\left(0, 0, \frac{\pi}{4}\right)$. $\left(\textit{Ответ: } f'_x\left(0, 0, \frac{\pi}{4}\right) = 0,\ f'_y\left(0, 0, \frac{\pi}{4}\right) = 0,\ f'_z\left(0, 0, \frac{\pi}{4}\right) = -1.\right)$

3.7. $f(x, y, z) = 27\sqrt[3]{x + y^2 + z^3}$, $M_0(3, 4, 2)$. (*Ответ:* $f'_x(3, 4, 2) = 1$, $f'_y(3, 4, 2) = 8$, $f'_z(3, 4, 2) = 12$.)

3.8. $f(x, y, z) = \operatorname{arctg}(xy^2 + z)$, $M_0(2, 1, 0)$. (*Ответ:* $f'_x(2, 1, 0) = 0{,}2$, $f'_y(2, 1, 0) = 0{,}8$, $f'_z(2, 1, 0) = 0{,}2$.)

3.9. $f(x, y, z) = \arcsin(x^2/y - z)$, $M_0(2, 5, 0)$. (*Ответ:* $f'_x(2, 5, 0) = 1{,}33$, $f'_y(2, 5, 0) = -0{,}27$, $f'_z(2, 5, 0) = -1{,}67$.)

3.10. $f(x, y, z) = \sqrt{z}\sin(y/x)$, $M_0(2, 0, 4)$. (*Ответ:* $f'_x(2, 0, 4) = 0$, $f'_y(2, 0, 4) = 1$, $f'_z(2, 0, 4) = 0$.)

3.11. $f(x, y, z) = y/\sqrt{x^2+z^2}$, $M_0(-1, 1, 0)$. (*Ответ:* $f'_x(-1, 1, 0) = 1$, $f'_y(-1, 1, 0) = 1$, $f'_z(-1, 1, 0) = 0$.)

3.12. $f(x, y, z) = \operatorname{arctg}(xz/y^2)$, $M_0(2, 1, 1)$. (*Ответ:* $f'_x(2, 1, 1) = 0{,}2$, $f'_y(2, 1, 1) = -0{,}8$, $f'_z(2, 1, 1) = 0{,}4$.)

3.13. $f(x, y, z) = \ln\sin(x - 2y + z/4)$. $M_0(1, 1/2, \pi)$. (*Ответ:* $f'_x(1, 1/2, \pi) = 1$, $f'_y(1, 1/2, \pi) = -2$, $f'_z(1, 1/2, \pi) = 0{,}25$.)

3.14. $f(x, y, z) = \frac{y}{x} + \frac{z}{y} - \frac{x}{z}$, $M_0(1, 1, 2)$. (*Ответ:* $f'_x(1, 1, 2) = -1{,}5$, $f'_y(1, 1, 2) = -1$, $f'_z(1, 1, 2) = 1{,}25$.)

3.15. $f(x, y, z) = 1/\sqrt{x^2+y^2-z^2}$, $M_0(1, 2, 2)$. (*Ответ:* $f'_x(1, 2, 2) = -1$, $f'_y(1, 2, 2) = -2$, $f'_z(1, 2, 2) = 2$.)

3.16. $f(x, y, z) = \ln(x + y^2) - \sqrt{x^2z^2}$, $M_0(5, 2, 3)$.

(*Ответ:* $f'_x(5, 2, 3) = -1{,}14$, $f'_y(5, 2, 3) = 0{,}44$, $f'_z(5, 2, 3) = 0{,}75$.)

3.17. $f(x, y, z) = \sqrt{zx^y}$, $M_0(1, 2, 4)$. (*Ответ:* $f'_x(1, 2, 4) = 4$, $f'_y(1, 2, 4) = 0$, $f'_z(1, 2, 4) = 0{,}25$.)

3.18. $f(x, y, z) = -z/\sqrt{x^2 + y^2}$, $M_0(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})$. (*Ответ:* $f'_x(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}) = 0{,}25$, $f'_y(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}) = 0{,}25$, $f'_z(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}) = -0{,}5$.)

3.19. $f(x, y, z) = \ln(x^3 + \sqrt[3]{y} - z)$, $M_0(2, 1, 8)$. (*Ответ:* $f'_x(2, 1, 8) = 12$, $f'_y(2, 1, 8) = 0{,}33$, $f'_z(2, 1, 8) = -1$.)

3.20. $f(x, y, z) = z/(x^4 + y^2)$, $M_0(2, 3, 25)$. (*Ответ:* $f'_x(2, 3, 25) = -1{,}28$, $f'_y(2, 3, 25) = -0{,}24$, $f'_z(2, 3, 25) = 0{,}04$.)

3.21. $f(x, y, z) = 8\sqrt[5]{x^3 + y^2 + z}$, $M_0(3, 2, 1)$. (*Ответ:* $f'_x(3, 2, 1) = 2{,}7$, $f'_y(3, 2, 1) = 0{,}4$, $f'_z(3, 2, 1) = 0{,}1$.)

3.22. $f(x, y, z) = \ln(\sqrt[5]{x} + \sqrt[4]{y} - z)$, $M_0(1, 1, 1)$. (*Ответ:* $f'_x(1, 1, 1) = 0{,}2$, $f'_y(1, 1, 1) = 0{,}25$, $f'_z(1, 1, 1) = -1$.)

3.23. $f(x, y, z) = -2x/\sqrt{y^2 + z^2}$, $M_0(3, 0, 1)$. (*Ответ:* $f'_x(3, 0, 1) = -2$, $f'_y(3, 0, 1) = 0$, $f'_z(3, 0, 1) = 6$.)

3.24. $f(x, y, z) = ze^{-(x^2 + y^2)/2}$, $M_0(0, 0, 1)$. (*Ответ:* $f'_x(0, 0, 1) = 0$, $f'_y(0, 0, 1) = 0$, $f'_z(0, 0, 1) = 1$.)

3.25. $f(x, y, z) = \dfrac{\sin(x - y)}{z}$, $M_0\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{3}, \sqrt{3}\right)$. $\Bigl($*Ответ:* $f'_x\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{3}, \sqrt{3}\right) = 0{,}5$, $f'_y\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{3}, \sqrt{3}\right) = -0{,}5$, $f'_z\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{3}, \sqrt{3}\right) = -0{,}17$.$\Bigr)$

3.26. $f(x, y, z) = \sqrt{z}\ln(\sqrt{x} + \sqrt{y})$, $M_0(4, 1, 4)$. (*Ответ:* $f'_x(4, 1, 4) = 0{,}17$, $f'_y(4, 1, 4) = 0{,}33$, $f'_z(4, 1, 4) = 0{,}27$.)

3.27. $f(x, y, z) = xz/(x - y)$, $M_0(3, 1, 1)$. (*Ответ:* $f'_x(3, 1, 1) = -0{,}25$, $f'_y(3, 1, 1) = 0{,}75$, $f'_z(3, 1, 1) = 1{,}5$.)

3.28. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos z}$, $M_0\left(3, 4, \dfrac{\pi}{2}\right)$. $\Bigl($*Ответ:* $f'_x\left(3, 4, \dfrac{\pi}{2}\right) = 0{,}6$, $f'_y\left(3, 4, \dfrac{\pi}{2}\right) = 0{,}8$, $f'_z\left(3, 4, \dfrac{\pi}{2}\right) = 2{,}4$.$\Bigr)$

3.29. $f(x, y, z) = ze^{-xy}$, $M_0(0, 1, 1)$. (*Ответ:* $f'_x(0, 1, 1) = -1$, $f'_y(0, 0, 1) = 0$, $f'_z(0, 1, 1) = 1$.)

3.30. $f(x, y, z) = \arcsin(x\sqrt{y}) - yz^2$, $M_0(0, 4, 1)$. (*Ответ:* $f'_x(0, 4, 1) = 2$, $f'_y(0, 4, 1) = -1$, $f'_z(0, 4, 1) = -8$.)

4. Найти полные дифференциалы указанных функций.

4.1. $z=2x^3y-4xy^5$. **4.2.** $z=x^2y\sin x-3y$.
4.3. $z=\operatorname{arctg}x+\sqrt{y}$. **4.4.** $z=\arcsin(xy)-3xy^2$.
4.5. $z=5xy^4+2x^2y^7$. **4.6.** $z=\cos(x^2-y^2)+x^3$.
4.7. $z=\ln(3x^2-2y^2)$. **4.8.** $z=5xy^2-3x^3y^4$.
4.9. $z=\arcsin(x+y)$. **4.10.** $z=\operatorname{arctg}(2x-y)$.
4.11. $z=7x^3y-\sqrt{xy}$. **4.12.** $z=\sqrt{x^2+y^2-2xy}$.
4.13. $z=e^{x+y-4}$. **4.14.** $z=\cos(3x+y)-x^2$.
4.15. $z=\operatorname{tg}((x+y)/(x-y))$.
4.16. $z=\operatorname{ctg}(y/x)$.
4.17. $z=xy^4-3x^2y+1$. **4.18.** $z=\ln(x+xy-y^2)$.
4.19. $z=2x^2y^2+x^3-y^3$. **4.20.** $z=\sqrt{3x^2-2y^2+5}$.
4.21. $z=\arcsin((x+y)/x)$.
4.22. $z=\operatorname{arcctg}(x-y)$.
4.23. $z=\sqrt{3x^2-y^2+x}$. **4.24.** $z=y^2-3xy-x^4$.
4.25. $z=\arccos(x+y)$. **4.26.** $z=\ln(y^2-x^2+3)$.
4.27. $z=2-x^3-y^3+5x$.
4.28. $z=7x-x^3y^2+y^4$.
4.29. $z=e^{y-x}$. **4.30.** $z=\operatorname{arctg}(2x-y)$.

5. Вычислить значение производной сложной функции $u=u(x,y)$, где $x=x(t)$, $y=y(t)$, при $t=t_0$ с точностью до двух знаков после запятой.

5.1. $u=e^{x-2y}$, $x=\sin t$, $y=t^3$, $t_0=0$. (*Ответ:* 1.)
5.2. $u=\ln(e^x+e^{-y})$, $x=t^2$, $y=t^3$, $t_0=-1$. (*Ответ:* $-2{,}5$.)
5.3. $u=y^x$, $x=\ln(t-1)$, $y=e^{t/2}$, $t_0=2$. (*Ответ:* 1.)
5.4. $u=e^{y-2x+2}$, $x=\sin t$, $y=\cos t$, $t_0=\pi/2$. (*Ответ:* -1.)
5.5. $u=x^2e^y$, $x=\cos t$, $y=\sin t$, $t_0=\pi$. (*Ответ:* -1.)
5.6. $u=\ln(e^x+e^y)$, $x=t^2$, $y=t^3$, $t_0=1$. (*Ответ:* 2,5.)
5.7. $u=x^y$, $x=e^t$, $y=\ln t$, $t_0=1$. (*Ответ:* 1.)
5.8. $u=e^{y-2x}$, $x=\sin t$, $y=t^3$, $t_0=0$. (*Ответ:* -2.)
5.9. $u=x^2e^{-y}$, $x=\sin t$, $y=\sin^2 t$, $t_0=\pi/2$. (*Ответ:* 0.)
5.10. $u=\ln(e^{-x}+e^y)$, $x=t^2$, $y=t^3$, $t_0=-1$. (*Ответ:* 2,5.)
5.11. $u=e^{y-2x-1}$, $x=\cos t$, $y=\sin t$, $t_0=\pi/2$. (*Ответ:* 2.)
5.12. $u=\arcsin(x/y)$, $x=\sin t$, $y=\cos t$, $t_0=\pi$. (*Ответ:* 1.)
5.13. $u=\arccos(2x/y)$, $x=\sin t$, $y=\cos t$, $t_0=\pi$. (*Ответ:* -2.)
5.14. $u=x^2/(y+1)$, $x=1-2t$, $y=\operatorname{arctg}t$, $t_0=0$. (*Ответ:* -5.)

5.15. $u = x/y$, $x = e^t$, $y = 2 - e^{2t}$, $t_0 = 0$. (*Ответ:* 3.)

5.16. $u = \ln(e^{-x} + e^{-2y})$, $x = t^2$, $y = \frac{1}{3}t^3$, $t_0 = 1$ (*Ответ:* -2.)

5.17. $u = \sqrt{x + y^2 + 3}$, $x = \ln t$, $y = t^2$, $t_0 = 1$. (*Ответ:* 1,25.)

5.18. $u = \arcsin(x^2/y)$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, $t_0 = \pi$. (*Ответ:* 0.)

5.19. $u = y^2/x$, $x = 1 - 2t$, $y = 1 + \operatorname{arctg} t$, $t_0 = 0$. (*Ответ:* 4.)

5.20. $u = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, $t_0 = \frac{\pi}{4}$. (*Ответ:* -4.)

5.21. $u = \sqrt{x^2 + y + 3}$, $x = \ln t$, $y = t^2$, $t_0 = 1$. (*Ответ:* 0,5.)

5.22. $u = \arcsin\frac{x}{2y}$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, $t_0 = \pi$. (*Ответ:* 0,5.)

5.23. $u = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$, $x = \sin 2t$, $y = \operatorname{tg}^2 t$, $t_0 = \frac{\pi}{4}$. (*Ответ:* -8.)

5.24. $u = \sqrt{x + y + 3}$, $x = \ln t$, $y = t^2$, $t_0 = 1$. (*Ответ:* 0,75.)

5.25. $u = y/x$, $x = e^t$, $y = 1 - e^{2t}$, $t_0 = 0$. (*Ответ:* -2.)

5.26. $u = \arcsin(2x/y)$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, $t_0 = \pi$. (*Ответ:* 2.)

5.27. $u = \ln(e^{2x} + e^y)$, $x = t^2$, $y = t^4$, $t_0 = 1$. (*Ответ:* 4.)

5.28. $u = \operatorname{arctg}(x + y)$, $x = t^2 + 2$, $y = 4 - t^2$, $t_0 = 1$. (*Ответ:* 0.)

5.29. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + 3}$, $x = \ln t$, $y = t^3$, $t_0 = 1$. (*Ответ:* 1,5.)

5.30. $u = \operatorname{arctg}(xy)$, $x = t + 3$, $y = e^t$, $t_0 = 0$. (*Ответ:* 0,4.)

6. Вычислить значения частных производных функции $z(x, y)$, заданной неявно, в данной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ с точностью до двух знаков после запятой.

6.1. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4$, $M_0(2, 1, 1)$. (*Ответ:* $z'_x(2, 1, 1) = 3$, $z'_y(2, 1, 1) = -1$.)

6.2. $x^2 + y^2 + z^2 - xy = 2$, $M_0(-1, 0, 1)$. (*Ответ:* $z'_x(-1, 0, 1) = -1$, $z'_y(-1, 0, 1) = 0{,}5$.)

6.3. $3x - 2y + z = xz + 5$, $M_0(2, 1, -1)$. (*Ответ:* $z'_x(2, 1, -1) = 4$, $z'_y(2, 1, -1) = -2$.)

6.4. $e^z + x + 2y + z = 4$, $M_0(1, 1, 0)$. (*Ответ:* $z'_x(1, 1, 0) = -0{,}5$, $z'_y(1, 1, 0) = -1$.)

6.5. $x^2 + y^2 + z^2 - z - 4 = 0$, $M_0(1, 1, -1)$. (*Ответ:* $z'_x(1, 1, -1) = 0{,}67$, $z'_y(1, 1, -1) = 0{,}67$.)

6.6. $z^3 + 3xyz + 3y = 7$, $M_0 = (1, 1, 1)$. (*Ответ:* $z'_x(1, 1, 1) = -0{,}5$, $z'_y(1, 1, 1) = -0{,}5$.)

6.7. $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = \frac{3}{2}$, $M_0\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$. (*Ответ:* $z'_x(\pi/4, 3\pi/4, \pi/4) = -1$, $z'_y(\pi/4, 3\pi/4, \pi/4) = 1$.)

6.8. $e^{z-1} = \cos x \cos y + 1$, $M_0(0, \pi/2, 1)$. (*Ответ:* $z'_x(0, \pi/2, 1) = 0$, $z'_y(0, \pi/2, 1) = -1$.)

6.9. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x = 0$, $M_0(1, 2, 1)$. (*Ответ:* $z'_x(1, 2, 1) = 2$, $z'_y(1, 2, 1) = -2$.)

6.10. $xy = z^2 - 1$, $M_0(0, 1, -1)$. (*Ответ:* $z'_x(0, 1, -1) = -0{,}5$, $z'_y(0, 1, -1) = 0$.)

6.11. $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 2$, $M_0(1, 1, 1)$. (*Ответ:* $z'_x(1, 1, 1) = -0{,}4$, $z'_y(1, 1, 1) = 0{,}8$.)

6.12. $x^2 + y^2 + z^2 + 2xz = 5$, $M_0(0, 2, 1)$. (*Ответ:* $z'_x(0, 2, 1) = -1$, $z'_y(0, 2, 1) = -2$.)

6.13. $x \cos y + y \cos z + z \cos x = \pi/2$, $M_0(0, \pi/2, \pi)$. (*Ответ:* $z'_x(0, \pi/2, \pi) = 0$, $z'_y(0, \pi/2, \pi) = 1$.)

6.14. $3x^2y^2 + 2xyz^2 - 2x^3z + 4y^3z = 4$, $M_0(2, 1, 2)$. (*Ответ:* $z'_x(2, 1, 2) = 7$, $z'_y(2, 1, 2) = -16$.)

6.15. $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z + 2 = 0$, $M_0(1, 1, 1)$. (*Ответ:* $z'_x(1, 1, 1) = 0{,}5$, $z'_y(1, 1, 1) = 1$.)

6.16. $x + y + z + 2 = xyz$, $M_0(2, -1, -1)$. (*Ответ:* $z'_x(2, -1, -1) = 0$, $z'_y(2, -1, -1) = -1$.)

6.17. $x^2 + y^2 + z^2 - 2xz = 2$, $M_0(0, 1, -1)$. (*Ответ:* $z'_x(0, 1, -1) = 1$, $z'_y(0, 1, -1) = 1$.)

6.18. $e^z - xyz - x + 1 = 0$, $M_0(2, 1, 0)$. (*Ответ:* $z'_x(2, 1, 0) = -1$, $z'_y(2, 1, 0) = 0$.)

6.19. $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y - 15 = 0$, $M_0(1, -1, 2)$. (*Ответ:* $z'_x(1, -1, 2) = -0{,}6$, $z'_y(1, -1, 2) = 0{,}13$.)

6.20. $x^2 - 2xy - 3y^2 + 6x - 2y + z^2 - 8z + 20 = 0$, $M_0(0, -2, 2)$. (*Ответ:* $z'_x(0, -2, 2) = 2{,}5$, $z'_y(0, -2, 2) = 2{,}5$.)

6.21. $x^2 + y^2 + z^2 = y - z + 3$, $M_0(1, 2, 0)$. (*Ответ:* $z'_x(1, 2, 0) = -2$, $z'_y(1, 2, 0) = -3$.)

6.22. $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - yz - 4x - 3y - z = 0$, $M_0(1, -1, 1)$. (*Ответ:* $z'_x(1, -1, 1) = 2$, $z'_y(1, -1, 1) = 2$.)

6.23. $x^2 - y^2 - z^2 + 6z + 2x - 4y + 12 = 0$, $M_0(0, 1, -1)$. (*Ответ:* $z'_x(0, 1, -1) = -0{,}25$, $z'_y(0, 1, -1) = 0{,}75$.)

6.24. $\sqrt{x^2+y^2}+z^2-3z=3$, $M_0(4, 3, 1)$. (*Ответ:* $z'_x(4, 3, 1)=0{,}8$, $z'_y(4, 3, 1)=0{,}6$.)

6.25. $x^2+2y^2+3z^2=59$, $M_0(3, 1, 4)$. (*Ответ:* $z'_x(3, 1, 4)=-0{,}25$, $z'_y(3, 1, 4)=-0{,}17$.)

6.26. $x^2+y^2+z^2-2xy-2xz-2yz=17$, $M_0(-2, -1, 2)$. (*Ответ:* $z'_x(-2, -1, 2)=0{,}6$, $z'_y(-2, -1, 2)=0{,}2$.)

6.27. $x^3+3xyz-z^3=27$, $M_0(3, 1, 3)$. (*Ответ:* $z'_x(3, 1, 3)=2$, $z'_y(3, 1, 3)=1{,}5$.)

6.28. $\ln z=x+2y-z+\ln 3$, $M_0(1, 1, 3)$. (*Ответ:* $z'_x(1, 1, 3)=3/4$, $z'_y(1, 1, 3)=3/2$.)

6.29. $2x^2+2y^2+z^2-8xz-z+6=0$, $M_0(2, 1, 1)$. (*Ответ:* $z'_x(2, 1, 1)=0$, $z'_y(2, 1, 1)=0{,}27$.)

6.30. $z^2=xy-z+x^2-4$, $M_0(2, 1, 1)$. (*Ответ:* $z'_x(2, 1, 1)\approx 1{,}67$, $z'_y(2, 1, 1)\approx 0{,}67$.)

Решение типового варианта

1. Найти область определения функции $z=\ln(x^2-3y+6)$.

▶ Логарифмическая функция определена только при положительном значении аргумента, поэтому $x^2-3y+6>0$, или $3y<x^2+6$. Значит, границей области будет линия $x^2-3y+6=0$, или $x^2=3y-6$, т. е. парабола. Область определения данной функции состоит из внешних точек параболы (рис. 10.4).◀

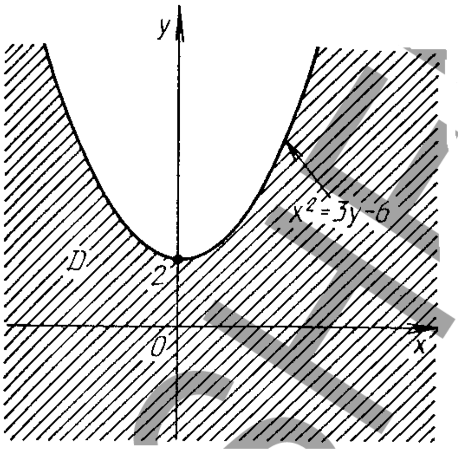

Рис. 10.4

2. Найти частные производные и частные дифференциалы функции $z=e^{-\sqrt[3]{x^2+5y^2}}$.

▶ Вначале найдем частные производные функции, использовав формулу дифференцирования сложной функции одной переменной:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{-\sqrt[3]{x^2+5y^2}}\left(-\frac{1}{3}(x^2+5y^2)^{-2/3}\cdot 2x\right)=$$

$$= -\frac{2x}{3} e^{-\sqrt[3]{x^2+5y^2}} \frac{1}{\sqrt[3]{(x^2+5y^2)^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{-\sqrt[3]{x^2+5y^2}} \left(-\frac{1}{3}(x^2+5y^2)^{-2/3} \cdot 10y \right) =$$

$$= -\frac{10y}{3} e^{-\sqrt[3]{x^2+5y^2}} \frac{1}{\sqrt[3]{(x^2+5y^2)^2}}.$$

Теперь находим частные дифференциалы:

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} dx = -\frac{2x}{3} e^{-\sqrt[3]{x^2+5y^2}} \frac{1}{\sqrt[3]{(x^2+5y^2)^2}}\, dx,$$

$$d_y z = \frac{dz}{dy} dy = -\frac{10y}{3} e^{-\sqrt[3]{x^2+5y^2}} \frac{1}{\sqrt[3]{(x^2+5y^2)^2}}\, dy. \blacktriangleleft$$

3. Вычислить значения частных производных $f'_x(M_0)$, $f'_y(M_0)$, $f'_z(M_0)$ для данной функции $f(x, y, z) = \sqrt{xy}\cos z$ в точке $M_0(1, 1, \pi/3)$ с точностью до двух знаков после запятой.

$\blacktriangleright$ Находим частные производные данной функции, затем вычисляем их значения в точке $M_0(1, 1, \pi/3)$:

$$f'_y(x, y, z) = \frac{y}{2\sqrt{xy}}\cos z, \quad f'_x(1, 1, \pi/3) = 0{,}25,$$

$$f'_y(x, y, z) = \frac{x}{2\sqrt{xy}}\cos z, \quad f'_y(1, 1, \pi/3) = 0{,}25,$$

$$f'_z(x, y, z) = -\sqrt{xy}\sin z, \quad f'_z(1, 1, \pi/3) = -0{,}86. \blacktriangleleft$$

4. Найти полный дифференциал функции $z = \operatorname{arctg}\sqrt{x/y}$.

$\blacktriangleright$ Находим частные производные данной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+x/y}\,\frac{1}{2\sqrt{x/y}}\,\frac{1}{y} = \frac{y}{x+y}\,\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}\,\frac{1}{y} = \frac{\sqrt{y/x}}{2(x+y)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+x/y}\,\frac{1}{2\sqrt{x/y}}\left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{y}{x+y}\,\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}\left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{\sqrt{x/y}}{2(x+y)}.$$

Согласно формуле (10.1), имеем

$$dz = \frac{\sqrt{y/x}}{2(x+y)}dx - \frac{\sqrt{x/y}}{2(x+y)}dy. \blacktriangleleft$$

5. Вычислить значение производной сложной функции $z = \arccos\frac{x^2}{y}$, где $x = 1 + \ln t$, $y = -2e^{-t^2+1}$, при $t_0 = 1$ с точностью до двух знаков после запятой.

▶ На основании формулы (10.4) имеем

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^4/y^2}}\frac{2x}{y}\frac{1}{z} -$$

$$-\frac{1}{\sqrt{1 - x^4/y^2}}\left(-\frac{x^2}{y^2}\right)(-2e^{-t^2+1})(-2t).$$

При $t_0 = 1$ получаем, что $x = 1$, $y = -2$,

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=1} = \frac{4}{\sqrt{3}}. \blacktriangleleft$$

6. Вычислить значения частных производных функции $z(x, y)$, заданной неявно уравнением $4x^3 - 3y^3 + 2xyz - 4xz = 3 - z^2$, в точке $M_0(0, 1, -1)$ с точностью до двух знаков после запятой.

▶ В данном случае $F(x, y, z) = 4x^3 - 3y^3 + 2xyz - 4xz + z^2 - 3$, поэтому

$$F'_x = 12x^2 + 2yz - 4z,\ F'_y = -9y^2 + 2xz,$$
$$F'_z = 2xy - 4x + 2z.$$

Следовательно, по формулам (10.7):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{12x^2 + 2yz - 4z}{2xy - 4x + 2z},\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{-9y^2 + 2xz}{2xy - 4x + 2z}.$$

Вычисляем значения $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точке $M_0(0, 1, -1)$:

$$\frac{\partial z(0, 1, -1)}{\partial x} = 1,\ \frac{\partial z(0, 1, -1)}{\partial y} = -4{,}5. \blacktriangleleft$$

ИДЗ-10.2

1. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к заданной поверхности S в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

1.1. S: $x^2 + y^2 + z^2 + 6z - 4x + 8 = 0$, $M_0(2, 1, -1)$.
1.2. S: $x^2 + z^2 - 4y^2 = -2xy$, $M_0(-2, 1, 2)$.
1.3. S: $x^2 + y^2 + z^2 - xy + 3z = 7$, $M_0(1, 2, 1)$.
1.4. S: $x^2 + y^2 + z^2 + 6y + 4x = 8$, $M_0(-1, 1, 2)$.
1.5. S: $2x^2 - y^2 + z^2 - 4z + y = 13$, $M_0(2, 1, -1)$.
1.6. S: $x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 4z + 4 = 0$, $M_0(2, 1, -1)$.
1.7. S: $x^2 + z^2 - 5yz + 3y = 46$, $M_0(1, 2, -3)$.

1.8. S: $x^2+y^2-xz-yz=0$, $M_0(0, 2, 2)$.
1.9. S: $x^2+y^2+2yz-z^2+y-2z=2$, $M_0(1, 1, 1)$.
1.10. S: $y^2-z^2+x^2-2xz+2x=z$, $M_0(1, 1, 1)$.
1.11. S: $z=x^2+y^2-2xy+2x-y$, $M_0(-1, -1, -1)$.
1.12. S: $z=y^2-x^2+2xy-3y$, $M_0(1, -1, 1)$.
1.13. S: $z=x^2-y^2-2xy-x-2y$, $M_0(-1, 1, 1)$.
1.14. S: $x^2-2y^2+z^2+xz-4y=13$, $M_0(3, 1, 2)$.
1.15. S: $4y^2-z^2+4xy-xz+3z=9$, $M_0(1, -2, 1)$.
1.16. S: $z=x^2+y^2-3xy-x+y+2$, $M_0(2, 1, 0)$.
1.17. S: $2x^2-y^2+2z^2+xy+xz=3$, $M_0(1, 2, 1)$.
1.18. S: $x^2-y^2+z^2-4x+2y=14$, $M_0(3, 1, 4)$.
1.19. S: $x^2+y^2-z^2+xz+4y=4$, $M_0(1, 1, 2)$.
1.20. S: $x^2-y^2-z^2+xz+4x=-5$, $M_0(-2, 1, 0)$.
1.21. S: $x^2+y^2-xz+yz-3x=11$, $M_0(1, 4, -1)$.
1.22. S: $x^2+2y^2+z^2-4xz=8$, $M_0(0, 2, 0)$.
1.23. S: $x^2-y^2-2z^2-2y=0$, $M_0(-1, -1, 1)$.
1.24. S: $x^2+y^2-3z^2+xy=-2z$, $M_0(1, 0, 1)$.
1.25. S: $2x^2-y^2+z^2-6x+2y+6=0$, $M_0(1, -1, 1)$.
1.26. S: $x^2+y^2-z^2+6xy-z=8$, $M_0(1, 1, 0)$.
1.27. S: $z=2x^2-3y^2+4x-2y+10$, $M_0(-1, 1, 3)$.
1.28. S: $z=x^2+y^2-4xy+3x-15$, $M_0(-1, 3, 4)$.
1.29. S: $z=x^2+2y^2+4xy-5y-10$, $M_0(-7, 1, 8)$.
1.30. S: $z=2x^2-3y^2+xy+3x+1$, $M_0(1, -1, 2)$.

2. Найти вторые частные производные указанных функций. Убедиться в том, что $z''_{xy}=z''_{yx}$.

2.1. $z=e^{x^2-y^2}$.
2.2. $z=\operatorname{ctg}(x+y)$.
2.3. $z=\operatorname{tg}(x/y)$.
2.4. $z=\cos(xy^2)$.
2.5. $z=\sin(x^2-y)$.
2.6. $z=\operatorname{arctg}(x+y)$.
2.7. $z=\arcsin(x-y)$.
2.8. $z=\arccos(2x+y)$.
2.9. $z=\operatorname{arcctg}(x-3y)$.
2.10. $z=\ln(3x^2-2y^2)$.
2.11. $z=e^{2x^2+y^2}$.
2.12. $z=\operatorname{ctg}(y/x)$.
2.13. $z=\operatorname{tg}\sqrt{xy}$.
2.14. $z=\cos(x^2y^2-5)$.
2.15. $z=\sin\sqrt{x^3y}$.
2.16. $z=\arcsin(x-2y)$.
2.17. $z=\arccos(4x-y)$.
2.18. $z=\operatorname{arctg}(5x+2y)$.
2.19. $z=\operatorname{arctg}(2x-y)$.
2.20. $z=\ln(4x^2-5y^3)$.
2.21. $z=e^{\sqrt{x+y}}$.
2.22. $z=\arcsin(4x+y)$.
2.23. $z=\arccos(x-5y)$.
2.24. $z=\sin\sqrt{xy}$.
2.25. $z=\cos(3x^2-y^3)$.
2.26. $z=\operatorname{arctg}(3x+2y)$.
2.27. $z=\ln(5x^2-3y^4)$.
2.28. $z=\operatorname{arcctg}(x-4y)$.
2.29. $z=\ln(3xy-4)$.
2.30. $z=\operatorname{tg}(xy^2)$.

3. Проверить, удовлетворяет ли указанному уравнению данная функция u.

3.1. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ u=\frac{y}{x}.$

3.2. $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=3(x^3-y^3),\ u=\ln\frac{x}{y}+x^3-y^3.$

3.3. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ u=\ln(x^2+(y+1)^2).$

3.4. $y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=(1+y\ln x)\frac{\partial u}{\partial x},\ u=x^y.$

3.5. $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=2u,\ u=\frac{xy}{x+y}.$

3.6. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ u=e^{xy}.$

3.7. $a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ u=\sin^2(x-ay).$

3.8. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ u=y\sqrt{\frac{y}{x}}.$

3.9. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,\ u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

3.10. $a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ u=e^{-\cos(x+ay)}.$

3.11. $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0,\ u=(x-y)(y-z)(z-x).$

3.12. $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=u,\ u=x\ln\frac{y}{x}.$

3.13. $y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}=0,\ u=\ln(x^2+y^2).$

3.14. $x^2\frac{\partial u}{\partial x}-xy\frac{\partial u}{\partial y}+y^2=0,\ u=\frac{y^2}{3x}+\arcsin(xy).$

3.15. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2xy,\ u=0,\ u=e^{xy}$

3.16. $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0,\ u=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}.$

3.17. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ u=\ln(x^2+y^2+2x+1).$

3.18. $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+u=0,\ u=\frac{2x+3y}{x^2+y^2}.$

3.19. $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = 1,\ u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$

3.20. $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 2u,\ u = (x^2 + y^2)\operatorname{tg}\frac{x}{y}.$

3.21. $9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\quad u = e^{-(x+3y)}\sin(x + 3y).$

3.22. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\ u = xe^{y/x}.$

3.23. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\ u = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$

3.24. $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0,\ u = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}.$

3.25. $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,\ u = \ln(x + e^{-y}).$

3.26. $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0,\ u = \arcsin\frac{x}{x+y}.$

3.27. $\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u}{y^2},\ u = \frac{y}{(x^2 - y^2)^5}.$

3.28. $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x+y}{x-y},\ u = \frac{x^2 + y^2}{x - y}.$

3.29. $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{u},\ u = \sqrt{2xy + y^2}.$

3.30. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\ u = \ln(x^2 - y^2).$

4. Исследовать на экстремум следующие функции.

4.1. $z = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 14y$. (*Ответ:* $z_{\max}(4,\ 4) = 28.$)

4.2. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$. (*Ответ:* $z_{\min}(1;\ 0{,}5) = 4.$)

4.3. $z = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2$. (*Ответ:* $z_{\max}(-4,\ -1) = -97.$)

4.4. $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$. (*Ответ:* $z_{\max}(4,\ -2) = 13.$)

4.5. $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$. (*Ответ:* $z_{\min}(5,\ 6) = -86.$)

4.6. $z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5$. (*Ответ:* $z_{\min}(1,\ 1) = 3.$)

4.7. $z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10$. (*Ответ:* $z_{\min}(1,\ 1) = 7.$)

4.8. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$. (*Ответ:* $z_{\min}(-1,\ 1) = 0.$)

4.9. $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$. (*Ответ:* $z_{\max}(2,\ -2) = 8.$)

4.10. $z = 6(x - y) - 3x^2 - 3y^2$. (*Ответ:* $z_{\max}(1,\ -1) = 6.$)

4.11. $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$. (*Ответ:* $z_{\min}(1, 4) = -21$.)

4.12. $z = (x-2)^2 + 2y^2 - 10$. (*Ответ:* $z_{\min}(2, 0) = -10$.)

4.13. $z = (x-5)^2 + y^2 + 1$. (*Ответ:* $z_{\min}(5, 0) = 1$.)

4.14. $z = x^3 + y^3 - 3xy$. (*Ответ:* $z_{\min}(1, 1) = -1$.)

4.15. $z = 2xy - 2x^2 - 4y^2$. (*Ответ:* $z_{\max}(0, 0) = 0$.)

4.16. $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$. (*Ответ:* $z_{\max}(4, 4) = 15$.)

4.17. $z = 2xy - 5x^2 - 3y^2 + 2$. (*Ответ:* $z_{\max}(0, 0) = 2$.)

4.18. $z = xy(12 - x - y)$. (*Ответ:* $z_{\max}(4, 4) = 64$.)

4.19. $z = xy - x^2 - y^2 + 9$. (*Ответ:* $z_{\max}(0, 0) = 9$.)

4.20. $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$. (*Ответ:* $z_{\max}(0, 0) = 10$.)

4.21. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$. (*Ответ:* $z_{\min}(1; 0{,}5) = 0$.)

4.22. $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$. (*Ответ:* $z_{\max}(4, 4) = 12$.)

4.23. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$. (*Ответ:* $z_{\min}(-4, 1) = -1$.)

4.24. $z = xy(6 - x - y)$. (*Ответ:* $z_{\max}(2, 2) = 8$.)

4.25. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$. (*Ответ:* $z_{\min}(-1, -1) = -1$.)

4.26. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$. (*Ответ:* $z_{\min}(1, 0) = -1$.)

4.27. $z = (x-1)^2 + 2y^2$. (*Ответ:* $z_{\min}(1, 0) = 0$.)

4.28. $z = xy - 3x^2 - 2y^2$. (*Ответ:* $z_{\max}(0, 0) = 0$.)

4.29. $z = x^2 + 3(y+2)^2$. (*Ответ:* $z_{\min}(0, -2) = 0$.)

4.30. $z = 2(x+y) - x^2 - y^2$. (*Ответ:* $z_{\max}(1, 1) = 2$.)

5. Найти наибольшее и наменьшее значения функции $z = z(x, y)$ в области $\bar{D}$, ограниченной заданными линиями.

5.1. $z = 3x + y - xy$, $\bar{D}$: $y = x$, $y = 4$, $x = 0$. (*Ответ:* $z_{\text{наиб}}(2, 2) = 4$, $z_{\text{наим}}(0, 0) = z(4, 4) = 0$.)

5.2. $z = xy - x - 2y$, $\bar{D}$: $x = 3$, $y = x$, $y = 0$. (*Ответ:* $z_{\text{наиб}}(0, 0) = z(3, 3) = 0$, $z_{\text{наим}}(3, 0) = -3$.)

5.3. $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$, $\bar{D}$: $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 2$. (*Ответ:* $z_{\text{наиб}}(1, 2) = 17$, $z_{\text{наим}}(1, 0) = -3$.)

5.4. $z = 5x^2 - 3xy + y^2$, $\bar{D}$: $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$. (*Ответ:* $z_{\text{наиб}}(1, 0) = 5$, $z_{\text{наим}}(0, 0) = 0$.)

5.5. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$, $\bar{D}$: $x - y + 1 = 0$, $x = 3$, $y = 0$. (*Ответ:* $z_{\text{наиб}}(3, 3) = 6$, $z_{\text{наим}}(2, 0) = -4$.)

5.6. $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8$, $\bar{D}$: $x = 0$, $y = 0$, $x + y - 1 = 0$. (*Ответ:* $z_{\text{наиб}}(0, 0) = 8$, $z_{\text{наим}}(0{,}5; 0{,}5) = 6{,}5$.)

5.7. $z = 2x^3 - xy^2 + y^2$, $\bar{D}$: $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 6$. (*Ответ:* $z_{\text{наиб}}(0, 6) = 36$, $z_{\text{наим}}(0, 0) = 0$.)

5.8. $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$, $\bar{D}$: $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$. (*Ответ:* $z_{\text{наиб}}(1,\ 1) = 6$, $z_{\text{наим}}(0,\ 0) = 0$.)

5.9. $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$, $\bar{D}$: $x = 0$, $y = 0$, $x + y - 3 = 0$. (*Ответ:* $z_{\text{наиб}}(0,\ 0) = -1$, $z_{\text{наим}}(0,\ 3) = -19$.)

5.10. $z = x^2 + 2xy - 10$, $\bar{D}$: $y = 0$, $y = x^2 - 4$. (*Ответ:* $z_{\text{наиб}}\left(-\frac{4}{3},\ -\frac{2}{5}\right) = -\frac{62}{27}$, $z_{\text{наим}}(1,\ -3) = -15$.)

5.11. $z = xy - 2x - y$, $\bar{D}$: $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$, $y = 4$. (*Ответ:* $z_{\text{наиб}}(3,\ 4) = 2$, $z_{\text{наим}}(3,\ 0) = -6$.)

5.12. $z = \frac{1}{2}x^2 - xy$, $\bar{D}$: $y = 8$, $y = 2x^2$. (*Ответ:* $z_{\text{наиб}}(-2,\ 8) = 18$, $z_{\text{наим}}(2,\ 8) = -14$.)

5.13. $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2$, $\bar{D}$: $x = 0$, $y = 0$, $x + y - 1 = 0$. (*Ответ:* $z_{\text{наиб}}(0,\ 1) = z(1,\ 0) = 3$, $z_{\text{наим}}\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$.)

5.14. $z = 2x^2 + 3y^2 + 1$, $\bar{D}$: $y = \sqrt{9 - \frac{9}{4}x^2}$, $y = 0$. (*Ответ:* $z_{\text{наиб}}(0,\ 3) = 28$, $z_{\text{наим}}(0,\ 0) = 1$.)

5.15. $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1$, $\bar{D}$: $x = -3$, $y = 0$, $x + y + 1 = 0$. (*Ответ:* $z_{\text{наиб}}(-3,\ 2) = 6$, $z_{\text{наим}}(-2,\ 0) = -3$.)

5.16. $z = 3x^2 + 3y^2 - x - y + 1$, $\bar{D}$: $x = 5$, $y = 0$, $x - y - 1 = 0$. (*Ответ:* $z_{\text{наиб}}(5,\ 4) = 115$, $z_{\text{наим}}(1,\ 0) = 3$.)

5.17. $z = 2x^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2 - 4x$, $\bar{D}$: $y = 2x$, $y = 2$, $x = 0$. (*Ответ:* $z_{\text{наиб}}(0,\ 0) = z(1,\ 2) = 0$, $z_{\text{наим}}(0,\ 2) = -2$.)

5.18. $z = x^2 - 2xy + \frac{5}{2}y^2 - 2x$, $\bar{D}$: $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 2$. (*Ответ:* $z_{\text{наиб}}(0,\ 2) = 10$, $z_{\text{наим}}\left(\frac{5}{3},\ \frac{2}{3}\right) = -1{,}67$.)

5.19. $z = xy - 3x - 2y$, $\bar{D}$: $x = 0$, $x = 4$, $y = 0$, $y = 4$. (*Ответ:* $z_{\text{наиб}}(0,\ 0) = 0$, $z_{\text{наим}}(4,\ 0) = -12$.)

5.20. $z = x^2 + xy - 2$, $\bar{D}$: $y = 4x^2 - 4$, $y = 0$. (*Ответ:* $z_{\text{наиб}}\left(-\frac{2}{3},\ -2{,}22\right) = -0{,}07$, $z_{\text{наим}}(0{,}5,\ -3) = -3{,}25$.)

5.21. $z = x^2y(4 - x - y)$, $\bar{D}$: $x = 0$, $y = 0$, $y = 6 - x$. (*Ответ:* $z_{\text{наиб}}(2,\ 1) = 4$, $z_{\text{наим}}(4,\ 2) = -64$.)

5.22. $z = x^3 + y^3 - 3xy$, $\bar{D}$: $x = 0$, $x = 2$, $y = -1$, $y = 2$. (*Ответ:* $z_{\text{наиб}}(2,\ -1) = 13$, $z_{\text{наим}}(0,\ -1) = -1$.)

5.23. $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$, $\bar{D}$: $x + 2y = 4$, $x - 2y = 4$, $x = 0$. (*Ответ:* $z_{\text{наиб}}\left(\frac{8}{5},\ \frac{6}{5}\right) = \frac{36}{5}$, $z_{\text{наим}}(0,\ 2) = -12$.)

5.24. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$, $\bar{D}$: $x = 3$, $y = 0$, $y = x + 1$. (*Ответ:* $z_{\text{наиб}}(3, 3) = 6$, $z_{\text{наим}}(2, 0) = -4$.)

5.25. $z = 6xy - 9x^2 - 9y^2 + 4x + 4y$, $\bar{D}$: $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 2$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ z_{\text{наиб}}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}, z_{\text{наим}}(0,2) = -28.\right)$

5.26. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y$, $\bar{D}$: $y = x + 2$, $y = 0$, $x = 2$. (*Ответ:* $z_{\text{наиб}}(2, 3) = 9$, $z_{\text{наим}}(1, 0) = -1$.)

5.27. $z = 4 - 2x^2 - y^2$, $\bar{D}$: $y = 0$, $y = \sqrt{1 - x^2}$. (*Ответ:* $z_{\text{наиб}}(0, 0) = 4$, $z_{\text{наим}}(-1, 0) = z(1, 0) = 2$.)

5.28. $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4$, $\bar{D}$: $x = -1$, $x = 1$, $y = -1$, $y = 1$. (*Ответ:* $z_{\text{наиб}}(-1, 1) = z(1, -1) = 13$, $z_{\text{наим}}(0, 0) = 4$.)

5.29. $z = x^2 + 2xy + 4x - y^2$, $\bar{D}$: $x + y + 2 = 0$, $x = 0$, $y = 0$. (*Ответ:* $z_{\text{наиб}}(0, 0) = 0$, $z_{\text{наим}}(-2, 0) = z(0, -4) = -4$.)

5.30. $z = 2x^2y - x^3y - x^2y^2$, $\bar{D}$: $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$. (*Ответ:* $z_{\text{наиб}}(1, 0{,}5) = 0{,}25$, $z_{\text{наим}}(4, 2) = -128$.)

Решение типового варианта

1. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности S: $z = x^2 - y^2 + 3xy - 4x + 2y - 4$ в точке $M_0(-1, 0, 1)$.

▶ Находим частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y - 4, \ \frac{\partial z}{\partial y} = -2y + 3x + 2.$$

Подставляя в полученные выражения координаты точки $M_0(-1, 0, 1)$, вычисляем, согласно формуле (10.8), координаты вектора $\mathbf{n}$, перпендикулярного к поверхности S в данной точке:

$$A = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0} = -6, \ B = \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0} = -1, \ C = -1.$$

Следовательно, касательная плоскость имеет уравнение

$$-6(x + 1) - y - (z - 1) = 0 \text{ или } 6x + y + z + 5 = 0,$$

а уравнение нормали на основании формулы (10.9) запишется в виде

$$\frac{x + 1}{6} = \frac{y}{1} = \frac{z - 1}{1}. \ ◀$$

2. Найти вторые частные производные функции $z = \arccos\sqrt{x/y}$. Убедиться в том, что $z''_{xy} = z''_{yx}$.

▶ Вначале находим первые частные производные данной функции:

$$z'_x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x/y}}\,\frac{1}{2\sqrt{x/y}}\,\frac{1}{y} = -\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{y-x}},$$

$$z'_y = -\frac{1}{\sqrt{1 - x/y}}\,\frac{1}{2\sqrt{x/y}}\left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{\sqrt{x}}{2y\sqrt{y-x}}.$$

Дифференцируя каждую из полученных производных по x и по y, находим вторые частные производные данной функции:

$$z''_{xx} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\sqrt{y-x} - \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y-x}}}{2x(y-x)} = \frac{y-x-x}{4x\sqrt{x}\sqrt{y-x}(y-x)} =$$

$$= \frac{y-2x}{4x\sqrt{x}(y-x)\sqrt{y-x}},$$

$$z''_{xy} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(-\frac{1}{2}\right)(y-x)^{-3/2} = \frac{1}{4\sqrt{x}(y-x)\sqrt{y-x}},$$

$$z''_{yy} = \frac{\sqrt{x}}{2}\left(-\frac{\sqrt{y-x} + y/(2\sqrt{y-x})}{y^2(y-x)}\right) = -\frac{\sqrt{x}(2x+3y)}{2y^2(y-x)},$$

$$z''_{yx} = \frac{1}{2y}\,\frac{\frac{\sqrt{y-x}}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y-x}}}{y-x} = \frac{y-x+x}{4y(y-x)\sqrt{x}\sqrt{y-x}} =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{x}(y-x)\sqrt{y-x}}.$$

Как видно, смешанные частные производные z''_{xy} и z''_{yx} равны. ◀

3. Проверить, удовлетворяет ли уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{4y^2}{x^2+y^2}\quad\frac{\partial u}{\partial x}$$

функция $u = \ln(x^2 + y^2)$.

▶ Находим частные производные первого и второго порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2},\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=-\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Подставляем полученные значения производных в левую часть исходного уравнения:

$$\frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}+\frac{8x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{8x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Тогда в первой части уравнения имеем

$$\frac{4y^2}{x^2+y^2}\quad\frac{2x}{x^2+y^2}=\frac{8xy^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Сравнивая полученные результаты, видим, что данная функция не удовлетворяет исходному уравнению. ◀

4. Исследовать на локальный экстремум функцию $z=xy(x+y-2)$.

▶ Находим первые частные производные данной функции:

$$z'_x=2xy+y^2-2y,\ z'_y=x^2+2xy-2x.$$

Приравнивая их нулю, получаем систему уравнений

$$\left.\begin{array}{l} y(2x+y-2)=0, \\ x(x+2y-2)=0, \end{array}\right\}$$

из которой определяем стационарные точки данной функции: $M_1(0,\ 0)$, $M_2(2,\ 0)$, $M_3(0,\ 2)$, $M_4(2/3,\ 2/3)$. С помощью теоремы 2 из § 10.4 выясним, какие из этих точек являются точками экстремума. Для этого вначале найдем вторые частные производные данной функции:

$$z''_{xx}=2y,\ z''_{xy}=2x+2y-2,\ z''_{yy}=2x.$$

Подставляя в полученные выражения для производных координаты стационарных точек и используя достаточные условия экстремума (см. § 10.4), имеем: для точки M_1 $\Delta=-4<0$, т. е. экстремума нет, для точки M_2 $\Delta=-4<$ <0, т. е. экстремума нет, для точки M_3 $\Delta=-4<0$, т. е. экстремума нет, для точки M_4 $\Delta=12/9>0$, $A=4/3>0$, т. е. имеем точку локального минимума функции, в которой $z_{\min}=z(2/3,\ 2/3)=-8/27$. ◀

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=xy-y^2+3x+4y$ в области $\bar{D}$, ограниченной линиями $x=0$, $y=0$, $x+y-1=0$ (рис. 10.5).

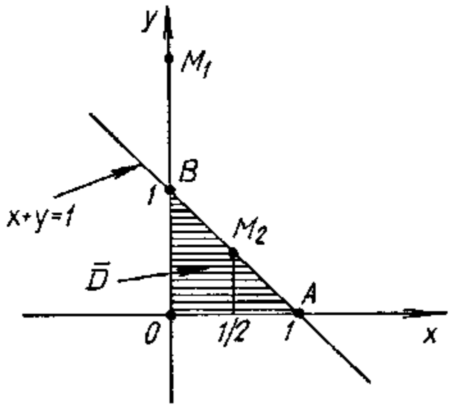

Рис. 10.5

▶ Выясним, существуют ли стационарные точки, лежащие внутри данной области $\overline{D}$, т. е. внутри треугольника OAB. Имеем:

$$\left.\begin{array}{l} z'_x = y + 3 = 0, \\ z'_y = x - 2y + 4 = 0. \end{array}\right\}$$

Решая полученную систему уравнений, находим стационарную точку $M(-10, -3)$. Она лежит вне области $\overline{D}$, следовательно, при решении задачи мы ее не учитываем. Исследуем значения функции на границе области $\overline{D}$. На стороне OA ($y = 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$) треугольника OAB функция z имеет вид $z = 3x$. Стационарных точек на отрезке OA нет, так как $z' = 3$. В точках O и A соответственно $z(0, 0) = 0$, $z(1, 0) = 3$. На стороне $OB(x = 0, 0 \leqslant y \leqslant 1)$ треугольника функция $z = -y^2 + 4y$, $z' = -2y + 4$. Находим стационарную точку из уравнения $-2y + 4 = 0$; получаем, что $y = 2$. Таким образом, точка $M_1(0, 2)$ не принадлежит области $\overline{D}$. Значение функции в точке B $z(0, 1) = 3$. Находим наибольшее и наименьшее значения на стороне AB: $x + y = 1$. Здесь $y = 1 - x$, $z = -2x^2 + 2x + 3$, тогда $z' = -4x + 2$ и из $z' = 0$ следует $x = 1/2$, т. е. стационарная точка $M_2(1/2, 1/2)$ принадлежит границе области $\overline{D}$. Значение функции в ней $z(1/2, 1/2) = 3{,}5$. Сравнивая все полученные значения функции, видим, что

$$z_{\text{наиб}} = z(1/2, 1/2) = 3{,}5, \quad z_{\text{наим}} = z(0,0) = 0. \blacktriangleleft$$

10.6. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ К ГЛ. 10

1. Найти область определения функции $u = \sqrt{z(2-z)} + \ln(4 - x^2) - 3y$. (*Ответ:* $|x| < 2$, $0 \leqslant z \leqslant 2$.)