2. Решить уравнение: $3x^2y' = y^2 + 8xy + 4x^2$.

3. Решить уравнение: $xy' + y = xy^2$.

4. Решить уравнение: $(\sin 2x - 2\cos(x+y))\,dx - 2\cos(x+y)\,dy = 0$.

5. Тело движется прямолинейно с ускорением, пропорциональным произведению скорости движения v на время t. Установить зависимость между скоростью и временем, если при $t = 0$ $v = v_0$.

Вариант 5

1. Решить дифференциальные уравнения:
а) $y' + y + 7 = 0$; б) $(\sqrt{xy} + \sqrt{x})\,dy = y\,dx$, $y(0) = 1$.

2. Решить уравнение: $\dfrac{xy' - y}{x} = \operatorname{ctg}\dfrac{y}{x}$.

3. Решить уравнение: $xy' - x^2\sin x = y$.

4. Решить уравнение: $(5xy^2 - x^3)\,dx + (5x^2y - y)\,dy = 0$.

5. Температура вынутого из печи хлеба в течение 20 минут понижается от 100° до 60°. Температура воздуха 20°. Через сколько времени от начала охлаждения температура хлеба будет 30°? (Указание: скорость охлаждения тела пропорциональна разности температур тела и среды.)

§ 6. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Дифференциальные уравнения второго порядка. Основные понятия. Теорема существования и единственности

⇛ Уравнение

$$F(x, y, y', y'') = 0, \tag{6.1}$$

связывающее между собой независимую переменную, неизвестную функцию $y(x)$, а также ее первые две производные $y'(x)$ и $y''(x)$, называется *дифференциальным уравнением второго порядка.* ⇚

Если уравнение (6.1) можно записать в виде

$$y'' = f(x, y, y'), \tag{6.2}$$

то говорят, что оно разрешено относительно второй производной. Мы будем иметь дело только с такими уравнениями.

⇛ Задача отыскания решения уравнения (6.2), удовлетворяющего заданным начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, где x_0, y_0, y'_0 — некоторые числа, называется *задачей Коши.* ⇚

$\Rrightarrow$ *Решением* уравнения (6.2) называется всякая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке вместе с y' и y'' в это уравнение обращает его в тождество. График функции $y = \varphi(x)$ в этом случае называется *интегральной кривой.* $\Lleftarrow$

$\Rrightarrow$ *Общим решением* уравнения (6.2) называется функция $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, зависящая от двух произвольных постоянных C_1 и C_2 и такая, что:

1) она является решением этого уравнения при любых конкретных значениях C_1 и C_2;

2) при любых допустимых начальных условиях

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0 \tag{6.3}$$

можно подобрать такие значения C_1^0 и C_2^0 постоянных, что функция $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$ будет удовлетворять этим начальным условиям. $\Lleftarrow$

$\Rrightarrow$ Любая функция $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$, получающаяся из общего решения уравнения (6.2) при конкретных значениях постоянных C_1 и C_2, называется *частным решением* этого уравнения. $\Lleftarrow$

Для дифференциального уравнения второго порядка (6.2) имеет место теорема существования и единственности решения, аналогичная соответствующей теореме для уравнений первого порядка.

Теорема 2.2. Если функция $f(x, y, y')$ и ее частные производные $f'_y(x, y, y')$ и $f'_{y'}(x, y, y')$ непрерывны в некоторой области D, содержащей точку с координатами (x_0, y_0, y'_0), то существует и притом единственное решение $y = y(x)$ уравнения (6.2), удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$.

Общий интеграл $\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$ или общее решение $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ уравнения (6.2) представляет собой семейство кривых, зависящих от двух произвольных постоянных C_1 и C_2. Задача Коши в таком случае состоит в определении интегральной кривой $y = y(x)$, проходящей через данную точку (x_0, y_0) и имеющей данный угловой коэффициент y'_0 касательной t (данное направление в данной точке (рис. 8)), т. е. $y'(x_0) = y'_0 = \operatorname{tg} \alpha$.

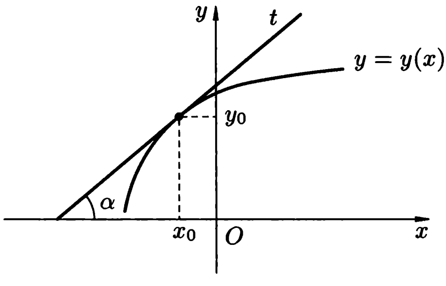

Рис. 8

Понижение порядка дифференциальных уравнений

В некоторых частных случаях удается понизить порядок дифференциального уравнения второго порядка.

Зачастую оно в итоге приводится к дифференциальному уравнению первого порядка одного из изученных ранее типов.

Рассмотрим наиболее типичные случаи.

Уравнения вида $y'' = f(x)$

Интегрированием обеих частей уравнения $y'' = f(x)$ оно приводится к уравнению первого порядка

$$y' = \int f(x)\,dx = F(x) + C_1.$$

Повторно интегрируя полученное равенство, находим общее решение исходного уравнения:

$$y = \int (F(x) + C_1)\,dx + C_2.$$

Дифференциальные уравнения $F(x, y', y'') = 0$, явно не содержащие искомой функции y

Такие уравнения допускают понижение порядка подстановкой $y' = p$, $y'' = p'$. Другими словами, данное уравнение равносильно системе дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} y' = p, \\ F(x, p, p') = 0. \end{cases}$$

Дифференциальные уравнения $F(y, y', y'') = 0$, явно не содержащие независимой переменной x

Уравнения такого вида допускают понижение порядка подстановкой $y' = p = p(y)$ (формальное отсутствие аргумента x позволяет считать неизвестную функцию p функцией аргумента y), откуда: $y'' = (p(y))' = p'(y) \cdot y'(x) = p' \cdot p$.

Таким образом, уравнение $F(y, y', y'') = 0$ равносильно системе

$$\begin{cases} y' = p, \\ F(y, p, p \cdot p') = 0. \end{cases}$$

Если функция F является однородной функцией степени k относительно переменных y, y' и y'', т. е. $F(x, ty, ty', ty'') = t^k \cdot F(x, y, y', y'')$, то дифференциальное уравнение $F(x, y, y', y'') = 0$ допускает понижение порядка подстановкой

$$y = e^{\int p(x)\,dx},$$

где $p(x)$ — новая неизвестная функция.

Интегрирование дифференциальных уравнений порядка выше второго

Приемы, описанные в предыдущем пункте, можно распространить на уравнения более высоких порядков.

Общее решение простейшего дифференциального уравнения n-го порядка $y^{(n)} = f(x)$ находится n-кратным интегрированием функции $f(x)$ и содержит n произвольных постоянных.

Дифференциальное уравнение вида $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$, не содержащее в явном виде искомой функции y, допускает понижение порядка подстановкой $y^{(k)} = p$. Другими словами, данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} y^{(k)} = p, \\ F(x, p, p', \ldots, p^{(n-k)}) = 0. \end{cases}$$

Дифференциальное уравнение вида $F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$, не содержащее явно аргумент x, допускает понижение порядка на единицу подстановкой $y' = p = p(y)$. При этом (по правилу дифференцирования сложной функции):

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p' \cdot p, \quad y'' = \frac{d}{dy}(p' \cdot p) \cdot \frac{dy}{dx} = (p''p + (p')^2)p$$

и т. д.

2.6.1. Найти общее решение дифференциального уравнения
$y'' = \dfrac{1}{1+x^2} + x - \sin x$.

◒ Интегрируя, получим

$$y' = \int \left(\frac{1}{1+x^2} + x - \sin x \right) dx = \operatorname{arctg} x + \frac{x^2}{2} + \cos x + C_1.$$

Повторное интегрирование ($\int \operatorname{arctg} x\, dx$ надо брать по частям: $\operatorname{arctg} x = u$, $du = \dfrac{dx}{1+x^2}$, $v = x$, $dx = dv$) приводит к ответу:

$$y = \int \left(\operatorname{arctg} x + \frac{x^2}{2} + \cos x + C_1 \right) dx =$$
$$= x \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{x^3}{6} + \sin x + C_1 x + C_2. \quad \bullet$$

Найти общие решения данных дифференциальных уравнений:

2.6.2. $y'' = \sin 4x + 2x - 3$.

2.6.3. $y'' = e^{5x} + \cos x - 2x^3$.

2.6.4. $y'' = xe^{x^2} + 3^{-x}$.

2.6.5. $y'' = 4\cos^4 x + 2\sin^2 \dfrac{x}{2} + \sqrt{x+2}$.

2.6.6. Найти частное решение данного дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$y'' = (e^{2x} + \sin 3x)x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

◐ Сначала находим общее решение. Интегрируя по частям, находим

$$y' = \int (e^{2x} + \sin 3x)x\,dx = \left[\begin{array}{cc} x = u, & du = dx \\ (e^{2x} + \sin 3x)\,dx = dv, & v = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{3}\cos 3x \end{array}\right]$$

$$= x\left(\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{3}\cos 3x\right) - \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{9}\sin 3x + C_1. \quad (6.4)$$

Повторное интегрирование по частям (проделайте нужные вычисления) приводит к общему решению:

$$y = x\left(\frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{9}\sin 3x\right) - \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{2}{27}\cos 3x + C_1 x + C_2. \quad (6.5)$$

В равенствах (6.4) и (6.5) подставим $x = 0$, $y' = 1$, $y = 1$, откуда получаем систему уравнений относительно неизвестных констант C_1 и C_2:

$$\begin{cases} 1 = -\frac{1}{4} + C_1, \\ 1 = -\frac{1}{4} - \frac{2}{27} + C_2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{5}{4}, \\ C_2 = \frac{143}{108}. \end{cases}$$

Найденные значения постоянных подставляем в общее решение (6.5). Получаем искомое частное решение

$$y_{\text{ч}} = x\left(\frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{9}\sin 3x\right) - \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{2}{27}\cos 3x + \frac{5}{4}x + \frac{143}{108}.$$ ●

Найти частные решения данных дифференциальных уравнений, удовлетворяющие заданным начальным условиям:

2.6.7. $y'' = (x^2 + 7x + 9)e^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$.

2.6.8. $y'' - 2(2x^2 + 2x - 5)\cos 2x - 4(2x + 1)\sin 2x$, $y = 0$, $y'(0) = 0$.

2.6.9. $y'' = \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + 2\cos x - x\sin x$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.

2.6.10. $y'' = (4x^3 + 10x^2 + 2x + 2)e^{2x} + 6\sin 3x + 9x\cos 3x$, $y(0) = 1$, $y(0)' = 1$.

2.6.11. Решить дифференциальное уравнение $y'' - y'\operatorname{ctg} x = 2x\sin x$. Найти также частное решение, если $y = 1$, $y' = 0$ при $x = \frac{\pi}{4}$.

◐ Данное дифференциальное уравнение второго порядка не содержит явно искомую функцию y, т. е. имеет вид $F(x, y', y'') = 0$. Положим $y' = p$, тогда $y'' = p'$. Получаем дифференциальное уравнение первого порядка $p' - p\operatorname{ctg} x = 2x\sin x$ — линейное относительно неизвестной функции $p = p(x)$. Общее решение этого уравнения найдем подстановкой $p = u \cdot v$, $p' = u'v + uv'$. Получаем:

$$u'v + uv' - uv\operatorname{ctg} x = 2x\sin x \Leftrightarrow \begin{cases} v' - v\operatorname{ctg} x = 0, \\ u'v = 2x\sin x. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим $\ln|v| = \ln|\sin x|$, т. е. $v = \sin x$. Подставляя во второе уравнение, получим $u' = 2x$, откуда $u = x^2 + C_1$. Следовательно, $p = uv = (x^2 + C_1)\sin x$, т. е. $y' = (x^2 + C_1)\sin x$. Интегрируя это равенство, найдем общее решение исходного уравнения

$$y = -(x^2 + C_1)\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C_2.$$

Подставляя в два последних равенства начальные условия $x = \frac{\pi}{4}$, $y = 1$, $y' = 0$, получаем

$$0 = \left(\frac{\pi^2}{16} + C_1\right)\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{и} \quad 1 = -\left(\frac{\pi^2}{16} + C_1\right)\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + C_2.$$

Найденные значения $C_1 = -\frac{\pi^2}{16}$ и $C_2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 2\right)$ подставляем в общее решение. Отсюда искомое частное решение

$$y_{\text{ч}} = 2x\sin x + 1 - \frac{\pi + 4}{4}\sqrt{2} - \left(x^2 - \frac{\pi^2}{16} - 2\right)\cos x. \qquad \bullet$$

Следующие дифференциальные уравнения решить подстановкой $y' = p$:

2.6.12. $y'' - \frac{2}{x}y' = 2x^3$.

2.6.13. $(x+1)y'' = y' - 1$.

2.6.14. $x^3y'' + x^2y' - 1 = 0$.

2.6.15. $y'' + y'\operatorname{tg} x - \sin 2x = 0$.

2.6.16. $xy'' - y' = x^2e^x$.

2.6.17. $xy''\ln x = y'$.

2.6.18. $y''\operatorname{tg} x - y' - 1 = 0$.

2.6.19. $xy'' + y' + x = 0$.

2.6.20. $(1+x^2)y'' + 2xy' - x^3 = 0$.

2.6.21. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''\operatorname{tg} y = 2(y')^2$. Найти также частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(1) = \frac{\pi}{4}$, $y'(1) = -2$.

◐ Данное дифференциальное уравнение не содержит в явном виде аргумента x, т. е. имеет вид $F(y, y', y'') = 0$. Примем в качестве независимой переменной y и выполним замену $y' = p = p(y)$. Тогда $y'' = p\cdot p'$, а исходное уравнение принимает вид: $p\cdot p'\operatorname{tg} y = 2p^2$. Если $p = 0$, то $y' = 0$, т. е. $y = C$. После сокращения на $p \neq 0$ решим дифференциальное уравнение первого порядка $p'\operatorname{tg} y = 2p$. Это уравнение с разделяющимися переменными. Решаем его стандартным образом:

$$\frac{dp}{p} = 2\frac{\cos y}{\sin y}\,dy,$$

т. е. $\ln|p| = 2\ln|\sin y| + \ln|C_1|$, $C_1 \neq 0$, откуда $p = C_1\sin^2 y$ (заметим, что найденное ранее решение $p = 0$ содержится в полученном выражении — достаточно положить $C_1 = 0$). Заменим p на y' и решим уравнение $y' = C_1\sin^2 y$, которое также является уравнением с разделяющимися переменными: $\frac{dy}{\sin^2 y} = C_1\,dx$, или $-\operatorname{ctg} y = C_1x + C_2$. Получили общее решение исходного уравнения в неявном виде. Подставим в него и в выражение для y' значения $x = 1$, $y = \frac{\pi}{4}$ и $y' = -2$. Из равенства $-2 = C_1 \sin^2 \frac{\pi}{4}$ находим $C_1 = -4$, а из равенства $-\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = C_1 + C_2$, учитывая, что $C_1 = -4$, находим $C_2 = 3$. Подставляя полученные значения констант в общее решение, которое запишем в виде $y = \operatorname{arcctg}(-C_1 x - C_2)$, находим требуемое частное решение $y_ч = \operatorname{arcctg}(4x - 3)$. ●

2.6.22. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$(1 + yy')y'' = (1 + (y')^2)y',$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = y'(0) = 1$.

○ Подстановка $y' = p = p(y)$ и $y'' = p \cdot p'$ приводит данное уравнение к виду $(1 + py)p \cdot p' = (1 + p^2)p$, откуда $p = 0$, т.е. $y = C$, или $p' = \dfrac{1 + p^2}{1 + py}$. Полученное дифференциальное уравнение не относится к уравнениям первого порядка известного нам типа. Перепишем его в виде $y' = \dfrac{1 + py}{1 + p^2}$, учитывая, что $p' = \dfrac{1}{y'}$. Получим линейное (относительно y и y') дифференциальное уравнение первого порядка, которое можно решить подстановкой $y = uv$. Его общее решение имеет вид (найдите его самостоятельно)

$$y = \sqrt{1 + p^2}\left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} + C_1\right).$$

Теперь остается решить дифференциальное уравнение первого порядка

$$y = \sqrt{1 + (y')^2}\left(\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} + C_1\right),$$

не разрешенное относительно производной y'. Но в общем виде решить его достаточно хлопотно. Однако, так как нам нужно найти частное решение исходного уравнения, то воспользуемся начальными условиями для определения постоянной C_1, полагая в последнем равенстве $y = 1$ и $y' = 1$. Приходим к равенству

$$1 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + C_1\right),$$

из которого $C_1 = 0$. Тем самым, нам достаточно решить уравнение $y = y'$, откуда $y = Ce^x$. Полагая здесь $x = 0$, $y = 1$, находим $C = 1$. Таким образом $y_ч = e^x$ — искомое частное решение. ●

Найти общие решения следующих дифференциальных уравнений, а там, где указаны начальные условия, найти соответствующее частное решение:

2.6.23. $y''y^3 = 1$.

2.6.24. $yy'' - (y')^2 - 1 = 0$.

2.6.25. $1 + (y')^2 - 2yy'' = 0$.

2.6.26. $2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2$.

2.6.27. $y'' = y'(1 + (y')^2)$.

2.6.28. $y'' = y' \ln y'$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

2.6.29. $y'' + y'\sqrt{(y')^2 - 1} = 0$, $y(\pi) = 0$, $y'(\pi) = -1$.

2.6.30. $3y'y'' = 2y$, $y(0) = y'(0) = 1$.

2.6.31. $y'' = 2y^3$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

2.6.32. Проинтегрировать дифференциальное уравнение второго порядка $xy'(yy'' - (y')^2) = y(y')^2 + x^4y^3$.

◔ Перепишем уравнение в виде

$$xy'(yy'' - (y')^2) - y(y')^2 - x^4y^3 = 0,$$

после чего обозначим через $F(x, y, y', y'')$ левую часть полученного равенства. Если заменить y, y', y'' на ty, ty', ty'', соответственно, то приходим к равенству

$$F(x, ty, ty', ty'') = t^3\left[xy'(yy'' - (y')^2) - y(y')^2 - x^4y^3\right] = t^3F(x, y, y', y'').$$

Это означает, что функция F — однородная (третьей степени, $k = 3$) и в таком случае соответствующее уравнение допускает понижение порядка подстановкой $y = e^{\int p\,dx}$, где $p = p(x)$ — неизвестная функция от x. Отсюда $y' = pe^{\int p\,dx}$, $y'' = (p' + p^2)e^{\int p\,dx}$. После соответствующих замен и сокращения на $e^{3\int p\,dx} \neq 0$ приходим к дифференциальному уравнению первого порядка относительно p

$$xp(p' + p^2 - p^2) = p^2 + x^4, \quad \text{или} \quad p' = \frac{p}{x} + \frac{x^3}{p}$$

(при этом мы теряем решение $y \equiv 0$, которое потом надо добавить к ответу). Получили уравнение Бернулли, которое можно решить (предлагаем сделать это самостоятельно) подстановкой $p = uv$. Его общее решение имеет вид

$$p = x\sqrt{x^2 + C_1}.$$

Поскольку $y = e^{\int p\,dx}$, то находим сначала

$$\int p\,dx = \int x\sqrt{x^2 + C_1}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 + C_1)^3} + C_2,$$

а затем и общее решение исходного дифференциального уравнения (за вычетом частного решения $y = 0$)имеет вид

$$y = e^{\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+C_1)^3}+C_2}, \quad \text{или} \quad y = C_3 \cdot e^{\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+C_1)^3}}, \quad C_3 > 0.$$

Учитывая, что при $C_3 = 0$ как раз получается потерянное частное решение $y = 0$, приходим к окончательному ответу: $y = C_3 \cdot e^{\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+C_2)^3}}$, $C_3 \geqslant 0$. ●

Решить дифференциальные уравнения:

2.6.33. $x^2yy'' = (y - xy')^2$.

2.6.34. $2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2$.

2.6.35. Найти частное решение дифференциального уравнения третьего порядка $y''' = 16\cos^3 2x + e^x - 1$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = -1$, $y'(0) = -\frac{1}{9}$, $y''(0) = 3$.

❍ Это простейшее дифференциальное уравнение решается трехкратным интегрированием правой части. Сначала понизим степень косинуса:

$$16\cos^3 2x = 8(1+\cos 4x)\cos 2x = 8\cos 2x + 4\cdot(2\cos 4x\cos 2x) =$$
$$= 8\cos 2x + 4\cdot(\cos 2x + \cos 6x) = 12\cos 2x + 4\cos 6x.$$

После первого интегрирования получаем

$$y'' = 6\sin 2x + \frac{2}{3}\sin 6x + e^x - x + C_1, \tag{6.6}$$

после второго

$$y' = -3\cos 2x - \frac{1}{9}\cos 6x + e^x - \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2, \tag{6.7}$$

а после третьего — общее решение

$$y = -\frac{3}{2}\sin 2x - \frac{1}{54}\sin 6x + e^x - \frac{x^3}{6} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3. \tag{6.8}$$

Подставляя в (6.6)–(6.8) значения $x = 0$, $y = -1$, $y' = -\frac{1}{9}$, $y'' = 3$, получим соответственно: $3 = 1 + C_1$, $-\frac{1}{9} = -3 - \frac{1}{9} + 1 + C_2$, $-1 = 1 + C_3$, откуда $C_1 = 2$, $C_2 = 2$, $C_3 = -2$. Подставляя эти значения в выражение для y, получаем требуемое частное решение

$$y_ч = -\frac{3}{2}\sin 2x - \frac{1}{54}\sin 6x + e^x - \frac{x^3}{6} + x^2 + 2x - 2.$$ ●

Замечание. Произведения произвольных постоянных на конкретные числа также можно считать произвольными постоянными. Например, в (6.8) можно писать $\overline{C}_1 x^2$ вместо $\dfrac{C_1 x^2}{2}$.

Решить следующие дифференциальные уравнения высших порядков, а там, где имеются начальные условия, найти соответствующие частные решения:

2.6.36. $y^{IV} = \cos 2x$.

2.6.37. $y^{(9)} = e^{bx}$.

2.6.38. $y''' = 6x^2$.

2.6.39. $y''' = 4\cos^3 x - x$.

2.6.40. $y''' = \cos x\cos 2x\cos 5x$.

2.6.41. $y''' = x^2 + 3x - 1$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 3$.

2.6.42. $y^V = \sin\frac{x}{2}$, $y(0) = y'(0) = 1$, $y''(0) = 8$, $y'''(0) = 6$, $y^{IV}(0) = -2$.

2.6.43. $y''' = \dfrac{24}{(x+2)^5}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = -\frac{5}{8}$.

2.6.44. Решить дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$2y^{IV} = 3\sqrt[3]{y'''}.$$

❍ Это уравнение имеет вид $F(x, y''', y^{IV}) = 0$, поэтому его порядок можно снизить на три единицы при помощи замены $y''' = p$, $y^{IV} = p'$. Приходим к уравнению $2p' = 3\sqrt[3]{p}$. Рассмотрим два случая: 1) если $p = 0$, т. е. $y''' = 0$ то $y = C_1x^2 + C_2x + C_3$ — не общее решение; 2) если $p \neq 0$, то $\frac{2}{3}\frac{dp}{\sqrt[3]{p}} = dx$. Отсюда получаем $p^{\frac{2}{3}} = x + C_1$, или $y''' = \pm(x + c_1)^{3/2}$. Последовательные интегрирования дают

$$y'' = \pm\frac{2}{5}(x + C_1)^{\frac{5}{2}} + C_2,$$

$$y' = \pm\frac{4}{35}(x + C_1)^{\frac{7}{2}} + C_2x + C_3,$$

$$y = \pm\frac{8}{315}(x + C_1)^{\frac{9}{2}} + \overline{C}_2x^2 + C_3x + C_4.$$

Таким образом, общее решение имеет вид

$$y = \pm\frac{8}{315}\sqrt{(x + C_1)^9} + C_2x^2 + C_3x + C_4,$$

к которому присоединим полученное ранее не общее решение $y = C_1x^2 + C_2x + C_3$. ●

Решить данные дифференциальные уравнения высших порядков:

2.6.45. $(1 + x^2)y''' + 2xy'' = x^3$. **2.6.46.** $x^4y''' + 2x^3y'' = 1$.
2.6.47. $x^4y^{IV} + 2x^3y''' = 1$. **2.6.48.** $y''' + y'' \operatorname{tg} x = \sin 2x$.
2.6.49. $xy''' - y'' = x^2e^x$. **2.6.50.** $y^{IV} - 2(y''' - 1)\operatorname{ctg} x = 0$.

2.6.51. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$xy''' - y'' + x^2 - 2 = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(1) = 2$, $y'(1) = -\frac{1}{3}$, $y''(1) = -3$.

◐ Данное уравнение имеет вид $F(x, y'', y''') = 0$, т. е. не содержит явно y и y'. Поэтому положим $y'' = p$, $y''' = p'$. Получаем линейное относительно неизвестной функции $p = p(x)$ уравнение

$$p' - \frac{p}{x} = \frac{2}{x} - x.$$

Его общее решение имеет вид (проверьте!) $p = x\left(C_1 - x - \frac{2}{x}\right)$. Нам остается решить простейшее дифференциальное уравнение $y'' = C_1x - x^2 - 2$. Подставив из начальных условий $x = 1$, $y'' = -3$, находим $C_1 = 0$. Интегрируя получающееся равенство $y'' = -x^2 - 2$, имеем $y' = -\frac{x^3}{3} - 2x + C_2$. Снова подставляя начальные условия $x = 1$, $y' = -\frac{1}{3}$, находим $C_2 = 2$. Значит, $y' = -\frac{x^3}{3} - 2x + 2$. Отсюда $y = -\frac{x^4}{12} - x^2 + 2x + C_3$. Наконец, учитывая, что $y(1) = 2$, т. е. $2 = -\frac{1}{12} - 1 + 2 + C_3$, получим $C_3 = \frac{13}{12}$, и, следовательно, $y_ч = -\frac{x^4}{12} - x^2 + 2x + \frac{13}{12}$. ●

2.6.52. Решить дифференциальное уравнение $y''(1 + 2\ln y') = 1$.

○ В этом уравнении явно отсутствуют и аргумент x, и искомая функция. Поэтому его можно отнести и к типу $F(y, y', y'') = 0$, а, значит, можно положить $y' = p = p(y)$, $y'' = p \cdot p'$, и к типу $F(x, y', y'') = 0$, а, значит, можно положить $y' = p = p(x)$, $y'' = p'$.

1) В первом случае приходим к уравнению $pp'(1 + 2\ln p) = 1$. Здесь $p' = \dfrac{dp}{dy}$, а уравнение после разделения переменных может быть записано в виде $p(1 + 2\ln p)\,dp = dy$. Отсюда $\int p(1 + 2\ln p)\,dp = \int dy$, т.е. (после интегрирования по частям) $p^2 \ln p = y + C_1$, или $(y')^2 \ln y' = y + C_1$. Получили уравнение, не разрешенное относительно y' (и не разрешенное относительно y'). Его проинтегрировать нельзя.

2) Во втором случае приходим к уравнению $p'(1 + 2\ln p) = 1$. Здесь $p' = \dfrac{dp}{dx}$, а уравнение может быть записано в виде $dp(1+2\ln p) = dx$. Отсюда $\int (1+2\ln p)\,dp = \int dx$, т.е. $2p\ln p - p = x + C_2$, или $2y' \ln y' - y' = x + C_2$. Это уравнение также нельзя проинтегрировать.

3) Результаты предыдущих действий можно объединить и получить параметрическую форму общего решения исходного уравнения. Положим $y' = t$. Тогда

$$\begin{cases} y + C_1 = t^2 \ln t, \\ x + C_2 = 2t\ln t - t \end{cases}$$

— общее решение данного уравнения в параметрической форме. ●

Решить дифференциальные уравнения:

2.6.53. $(y'')^2 + (y''')^2 = 1$.

2.6.54. $y'y''' = 3(y'')^2$.

2.6.55. $xy''' + y'' = x + 1$.

2.6.56. $(y'')^2 - 2y'y'' + 3 = 0$.

2.6.57. $(y'')^2 - y'y''' = \left(\dfrac{y'}{x}\right)^2$.

2.6.58. $y''' = 3yy'$, $y(0) = y'(0) = 1$, $y''(0) = \dfrac{3}{2}$.

2.6.59. $y'' + 2y'' \ln y' = 1$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

2.6.60. $y'''y^2 - 3yy'y'' + 2(y')^3 + \dfrac{y}{x}(yy'' - (y')^2) = \dfrac{y^3}{x^2}$.

Дополнительные задания

Решить дифференциальные уравнения:

2.6.61. $(1+x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0.$

2.6.62. $xy'' = y' \ln \dfrac{y'}{x}.$

2.6.63. $xy''' + y'' = 1 + x.$

2.6.64. $(1+x^2)y'' - 2xy' = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 3.$

2.6.65. $y''(1 + \ln x) + \dfrac{y'}{x} = 2 + \ln x,\ y(1) = \dfrac{1}{2},\ y'(1) = 1.$

2.6.66. $y'' = \dfrac{y'}{x}\left(1 + \ln \dfrac{y'}{x}\right),\ y(1) = \dfrac{1}{2},\ y'(1) = 1.$

2.6.67. $yy'' + (y')^2 - (y')^3 \ln y = 0.$

2.6.68. $y''' = (y'')^3.$

2.6.69. $(x+1)y'' - (x+2)y' + x + 2 = 0.$

2.6.70. $3y'y'' = y + (y')^3 + 1,\ y(0) = -2,\ y'(0) = 0.$

2.6.71. $y^2 + (y')^2 - 2yy'' = 0,\ y(0) = y'(0) = 1.$

2.6.72. $2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

2.6.73. $y' = x(y'')^2 + (y'')^2.$

Контрольные вопросы и более сложные задания

2.6.74. Почему общее решение дифференциального уравнения второго порядка содержит ровно две постоянные? Какую роль играют они в структуре общего решения?

2.6.75. Могут ли через точку (x_0, y_0) плоскости Oxy проходить пять различных частных решений дифференциального уравнения третьего порядка? второго порядка?

Решить дифференциальные уравнения:

2.6.76. $y'''(1 + (y')^2) - 3y'(y'')^2 = 0.$

2.6.77. $2yy'' + (y'')^2 + (y')^4 = 0.$

2.6.78. $yy'' + (y')^2 = y^2 \ln y.$

2.6.79. $yy'' = (y')^2 + y'\sqrt{y^2 + (y')^2}.$

2.6.80. $1 + (y')^2 = 2yy'',\ y(1) = y'(1) = 1.$

2.6.81. $y' = xy'' + y'' - (y'')^2.$

2.6.82. $(x-1)y''' + 2y' = \dfrac{x+1}{2x^2}.$

2.6.83. $x(y')^2y'' = (y')^2 + \dfrac{1}{3}x^4.$

2.6.84. $\sqrt{1-x^2}\,y'' + \sqrt{1-(y')^2} = 0.$