Глава 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ. УРАВНЕНИЯ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

⇛ Уравнение

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1.1}$$

связывающее между собой независимую переменную, искомую (неизвестную) функцию $y(x)$ и ее производную $y'(x)$ называется *дифференциальным уравнением первого порядка.* ⇚

Если уравнение (1.1) можно записать в виде $y' = f(x, y)$, то говорят, что оно разрешимо относительно производной. Это уравнение иногда записывают в виде $dy = f(x, y)\,dx$ или, более общо,

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$$

(дифференциальная форма).

⇛ *Решением* (или *интегралом*) дифференциального уравнения первого порядка называется любая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в это уравнение обращает его в тождество. График функции $y = \varphi(x)$ в этом случае называется *интегральной кривой.* Процесс нахождения решений данного дифференциального уравнения называется *интегрированием* этого уравнения. ⇚

⇛ Задача отыскания решения дифференциального уравнения первого порядка (1.1), удовлетворяющего заданному *начальному условию* $y(x_0) = y_0$, называется *задачей Коши.* ⇚

Геометрически это равносильно следующему: требуется найти интегральную кривую уравнения (1.1), проходящую через точку $M_0(x_0, y_0)$.

⇛ *Общим решением* уравнения (1.1) называется такая функция

$$y = \varphi(x, C), \tag{1.2}$$

где C — произвольная постоянная, что:

1) при любом конкретном значении C она является решением этого уравнения;

2) для любого допустимого начального условия $y(x_0) = y_0$ найдется такое значение постоянной $C = C_0$, что $\varphi(x_0, C_0) = y_0$. ⇚

В некоторых случаях общее решение дифференциального уравнения приходится записывать в неявном виде: $\Phi(x, y, C) = 0$. Тогда соотношение $\Phi(x, y, C) = 0$ называется *общим интегралом* этого уравнения.

Геометрически общее решение (общий интеграл) представляет собой семейство интегральных кривых на плоскости Oxy.

⇛ *Частным решением* дифференциального уравнения первого порядка называется функция

$$y = \varphi(x, C_0),$$

получаемая из общего решения (1.2) при конкретном значении постоянной $C = C_0$.

Частным интегралом уравнения (1.1) называется равенство $\Phi(x, y, C_0) = 0$, полученное из общего интеграла при фиксированном значении C. ⇚

Теорема 2.1[1]**.** Пусть в дифференциальном уравнении $y' = f(x,y)$ функция $f(x,y)$ и ее частная производная $f'_y(x,y)$ непрерывны в некоторой области D плоскости Oxy. Тогда для любой точки $M(x_0, y_0) \in D$ существует и притом единственное решение $y = y(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

В каждой точке $(x_0, y_0) \in D$ число $f(x_0, y_0)$ выражает угловой коэффициент касательной к кривой $y = y(x)$. Поэтому каждой точке области D уравнение $y' = f(x,y)$ ставит в соответствие некоторое направление — геометрически его можно изобразить черточкой (стрелкой), проходящей через эту точку. Тем самым уравнение $y' = f(x,y)$, $(x,y) \in D$ определяет *поле направлений* на плоскости.

Множество точек $(x,y) \in D$, в которых $y' = k$, где k — постоянная, или, что то же самое, $f(x,y) = k$ (линия уровня функции $f(x,y)$), называется *изоклиной* дифференциального уравнения. В точках изоклины направление поля одинаково, т. е. направления касательных в точках изоклины (или соответствующие черточки) параллельны.

Придавая k близкие числовые значения, можно построить достаточную густую сеть изоклин, а с их помощью — приближенно нарисовать вид интегральных кривых, т. е. решений дифференциального уравнения. Этот метод, *метод изоклин*, или графический (геометрический) метод решения дифференциальных уравнений, особенно ценен в том случае, когда решение, общее или частное, уравнения не выражается в элементарных функциях — интеграл не берется.

Некоторые дифференциальные уравнения могут иметь такие решения, которые не получаются из общего ни при каких значениях произвольной постоянной. Эти решения не являются частными и поэтому называются *особыми.* Особые решения могут иметь только те уравнения, для которых нарушаются условия теоремы существования и единственности решения.

⇛ Уравнение вида

$$P_1(x) \cdot Q_1(y)\,dx + P_2(x) \cdot Q_2(y)\,dy = 0 \tag{1.3}$$

называется *дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.* ⇚

[1] Теорема существования и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка.

Уравнение (1.3) путем деления на произведение $Q_1(y) \cdot P_2(x)$ приводится к уравнению с *разделенными переменными*

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}\,dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}\,dy = 0 \tag{1.4}$$

(коэффициент при dx зависит только от x, а при dy — только от y).

Общий интеграл полученного уравнения находится почленным интегрированием:

$$\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}\,dx + \int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}\,dy = C.$$

Заметим, что уравнению (1.3) могут удовлетворять решения, потерянные при делении на $Q_1(y) \cdot P_2(x)$, т. е. получаемые из уравнения $Q_1(y) \cdot P_2(x) = 0$. Если эти решения не входят в найденный общий интеграл, то они являются особыми решениями уравнения (1.3).

Уравнение $y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$ сводится к уравнению (1.4). Для этого достаточно положить $y' = \dfrac{dy}{dx}$ и разделить переменные.

2.1.1. Показать, что данная функция является решением данного дифференциального уравнения.

а) $y = (x + C)e^x$, $y' - y = e^x$;

б) $y = -\dfrac{2}{x^2}$, $xy^2\,dx - dy = 0$;

в) $x^2 - xy + y^2 = C$, $(x - 2y)y' - 2x + y = 0$.

а) Находим производную данной функции: $y' = e^x + (x+C)e^x$. Теперь подставим значения y и y' в заданное уравнение: $e^x+(x+C)e^x-(x+C)e^x = e^x$. Получили тождество $e^x = e^x$. Следовательно, функция $y = (x+C)e^x$ является решением уравнения $y' - y = e^x$.

б) Сначала находим dy: $dy = \left(-\dfrac{2}{x^2}\right)'_x dx = \dfrac{4}{x^3}\,dx$. Подставив значения y и dy в данное уравнение, получим тождество: $x \cdot \left(-\dfrac{2}{x^2}\right)^2 dx - \dfrac{4}{x^3}\,dx = 0$, т. е. $0 = 0$. Значит, функция $y = -\dfrac{2}{x^2}$ — действительно решение исходного уравнения.

в) Найдем производную неявной функции, для чего продифференцируем обе части уравнения $x^2-xy+y^2 = C$ по x: $2x-y-xy'+2yy' = 0$, откуда $y' = \dfrac{y-2x}{2y-x}$, $x \neq 2y$. Подставим полученное выражение для y' в данное дифференциальное уравнение: $(x-2y) \cdot \dfrac{y-2x}{2y-x} - 2x + y = 0$. Уравнение обращается в тождество, т. е. функция $x^2 - xy + y^2 = C$ является интегралом исходного уравнения. ●

2.1.2. Показать, что заданные функции являются решениями соответствующих дифференциальных уравнений:

а) $y = \ln\cos x$, $y' = -\operatorname{tg} x$;

б) $x^2 + 2xy = C$, $(x + y)\,dx + x\,dy = 0$;
в) $y = C \cdot \sin x$, $y' \operatorname{tg} x - y = 0$;
г) $y = Ce^{-3x}$, $y' + 3y = 0$;
д) $y - x = Ce^{y}$, $(x - y + 1)y' = 1$;
е) $y = Ce^{x^3}$, $dy - 3x^2y\,dx = 0$.

2.1.3. Проверить, являются ли решениями данных дифференциальных уравнений указанные функции:
а) $y = \dfrac{1}{3(x+1)}$, $y' = 3y^2$;
б) $v = \frac{c}{b}\left(1 - e^{-\frac{bt}{a}}\right)$, $a\dfrac{dv}{dt} + bv - c = 0$;
в) $y = 3 - e^{-x^2}$, $xy' + 2y = e^{-x^2}$;
г) $x^2 + t^2 - 2t = C$, $x\dfrac{dx}{dt} + t = 1$.

2.1.4. Решить задачу Коши:
а) $y' = \sin 5x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$; б) $\dfrac{dx}{dt} = 3$, $x = 1$ при $t = -1$.

○ а) Проинтегрируем обе части уравнения:

$$y = \int \sin 5x\,dx = -\frac{1}{5}\cos 5x + C.$$

Теперь найдем частное решение уравнения. Подставив $x = \frac{\pi}{2}$ и $y = 1$ в найденное решение, получим искомое значение C: $1 = -\frac{1}{5}\cos\frac{5\pi}{2} + C$, откуда $C = 1$. Таким образом решением задачи Коши является функция $y = -\frac{1}{5}\cos 5x + 1$.

б) Интегрируя, находим: $x = 3t + C$, откуда, с учетом начального условия, имеем: $1 = 3\cdot(-1) + C$, $C = 4$. Искомое частное решение есть функция $x = 3t + 4$. ●

2.1.5. Решить задачу Коши:
а) $y' = 2x + 1$, $y(2) = 5$; б) $y' = e^{-3x}$, $y(0) = \frac{2}{3}$.

2.1.6. Составить дифференциальное уравнение по заданному семейству интегральных кривых:
а) $y = Cx^3$;
б) семейство парабол, с вершиной в начале координат и осью, совпадающей с осью абсцисс.

○ а) Продифференцировав по x равенство $y = Cx^3$, получим: $y' = 3Cx^2$. Кроме того, очевидно, $C = \dfrac{y}{x^3}$. Подставляя это выражение для C в равенство $y' = 3Cx^2$, получаем искомое дифференциальное уравнение: $y' = 3\cdot\dfrac{y}{x^3}\cdot x^2$, т. е. $xy' = 3y$.

б) Заданное в условии семейство парабол определяется уравнением $y^2 = Cx$. Отсюда $2y\cdot y' = C$. Исключив из равенств $y^2 = Cx$ и $2y\cdot y' = C$ параметр C, получим дифференциальное уравнение $2xy' - y = 0$. ●

2.1.7. Изобразить семейство интегральных кривых дифференциального уравнения:

а) $y' = 3$; б) $y' = \frac{2}{x}$.

2.1.8. Составить дифференциальные уравнения заданных семейств интегральных кривых:

а) $y = \frac{C}{x}$; б) $x^3 = C(x^2 - y^2)$.

2.1.9. Составить дифференциальное уравнение:

а) процесса изменения температуры тела в среде с температурой t_0, если скорость изменения температуры пропорциональна разности температур тела и среды;

б) процесса изменения численности населения страны, считая, что скорость прироста населения пропорциональна его численности.

○ а) Обозначим через $T(t)$ температуру тела в момент времени t. Скорость изменения температуры тела равна $\frac{dT}{dt}$. Разность температур тела и среды равна $T - t_0$. Тогда дифференциальное уравнение процесса согласно условию задачи будет таким: $\frac{dT}{dt} = -k(T - t_0)$, где $k > 0$ — коэффициент пропорциональности. Если $T - t_0 > 0$, то скорость изменения температуры отрицательна, т. е. что температура тела понижается; если $T - t_0 < 0$, то скорость положительна — тело нагревается.

б) Обозначим численность населения страны в момент времени t через $N(t)$. Тогда дифференциальное уравнение процесса изменения численности населения будет таким $\frac{dN}{dt} = kN$, где $k > 0$ — коэффициент пропорциональности. ●

2.1.10. Составить дифференциальное уравнение изменения скорости при замедленном прямолинейном движении тела массы m_0 под действием силы сопротивления среды, пропорциональной квадрату скорости (k — коэффициент пропорциональности). Использовать второй закон Ньютона.

2.1.11. Составить дифференциальное уравнение изменения массы радия в зависимости от времени («радиоактивный распад»), считая, что скорость распада радия прямо пропорциональна (коэффициент $k > 0$) его количеству в каждый момент времени.

2.1.12. Дано дифференциальное уравнение $y' = x^2$. Построить поле направлений. Методом изоклин построить приближенно графики интегральных кривых. Сравнить их с точными интегральными кривыми.

○ Имеем $f(x,y) = x^2$, $f'_y(x,y) = 0$. Условия теоремы существования и единственности выполняются во всех точках плоскости Oxy. Через каждую точку проходит единственная интегральная кривая и различные интегральные кривые не пересекаются.

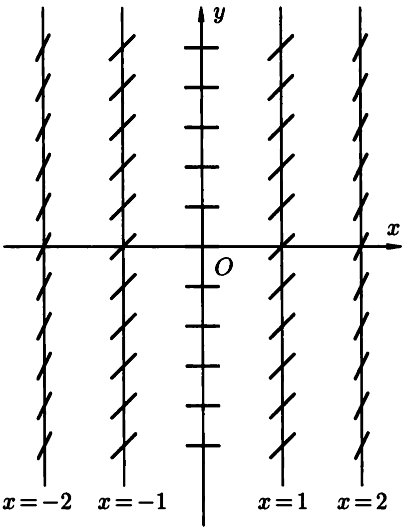

Рис. 3

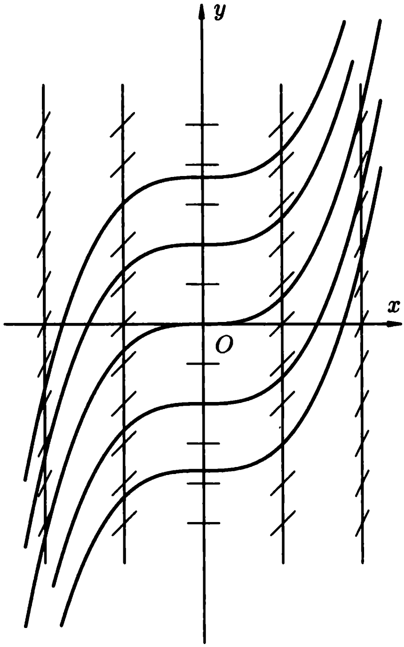

Рис. 4

При $x = 0$ и любом $y \in (-\infty, +\infty)$ имеем $y' = 0$, т. е. во всех точках оси Oy поле горизонтально (рис. 3). При $x = 1$ и любом $y \in (-\infty, +\infty)$ имеем $y' = 1$ (поле образует угол 45° с осью Ox), при $x = 1$ поле также образует с осью Ox угол 45°. Поле симметрично относительно оси Ox. Построим теперь интегральные кривые, которые в каждой точке касаются «поля». Полученные кривые напоминают кубические параболы (рис. 4). Точные интегральные кривые имеют вид $y = \dfrac{x^3}{3} + C$. ●

Для следующих дифференциальных уравнений построить поле направлений и приближенным образом построить некоторые интегральные кривые

2.1.13. $y' = -x + y$.

2.1.14. $y' = x - 1$.

2.1.15. Решить уравнение $(x - xy^2)dx + (y - yx^2)dy = 0$. Имеет ли оно особые решения?

❍ Преобразовывая, запишем данное уравнение в виде (1.3):

$$x(1 - y^2)dx + y(1 - x^2)dy = 0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделим обе части уравнения на $(1 - y^2)(1 - x^2)$. Получим уравнение с разделенными пе-

ременными
$$\frac{x}{1-x^2}\,dx+\frac{y}{1-y^2}\,dy=0.$$
Интегрируя обе части уравнения, имеем:
$$-\frac{1}{2}\ln|1-x^2|-\frac{1}{2}\ln|1-y^2|=-\frac{1}{2}\ln|C|,\quad C\neq 0$$
(произвольную постоянную здесь удобно записать именно так: $-\frac{1}{2}\ln|C|$), т. е. $(1-x^2)(1-y^2)=C$, где $C\neq 0$; это возможно, так $\ln|C|$ может принимать любые действительные значения. Получили общий интеграл исходного уравнения. При делении на $(1-y^2)(1-x^2)$ мы могли потерять решения $y=1$, $y=-1$, $x=1$, $x=-1$, но они содержатся в общем интеграле, если подставить дополнительное значение $C=0$. Таким образом, особых решений данное уравнение не имеет. ●

Решить дифференциальные уравнения:

2.1.16. $(1+y)\,dx-(1-x)\,dy=0$.

2.1.17. $\sqrt{1-y^2}\,dx+y\sqrt{1-x^2}\,dy=0$.

2.1.18. $xyy'=1-x^2$.

2.1.19. $y'(1+y)=xy\sin x$.

2.1.20. $e^y(1+y')=1$.

2.1.21. $y'-xy^2=0$.

2.1.22. Найти частное решение уравнения
$$y\,dx+\operatorname{ctg}x\,dy=0,\qquad y\big|_{x=\frac{\pi}{3}}=-1.$$

❍ Это уравнение имеет вид (1.3). Разделяя переменные и интегрируя, находим общее решение заданного уравнения:
$$\operatorname{tg}x\,dx+\frac{1}{y}\,dy=0,\quad \int\operatorname{tg}x\,dx+\int\frac{dy}{y}=\ln|C_1|,\quad C_1\neq 0,\qquad \text{откуда}$$
$$\ln|y|-\ln|\cos x|=\ln|C_1|,\quad |y|=|C_1\cos x|,\quad \text{т. е.}$$
$$y=\pm C_1\cos x,\quad \text{или}\quad y=C\cos x\qquad (\text{положили } C=\pm C_1).$$
Подставляя в найденное общее решение $y=-1$ и $x=\frac{\pi}{3}$ (используем начальное условие), находим постоянную C. А именно:
$$-1=C\cos\frac{\pi}{3},\qquad C=-2.$$
Следовательно, искомое частное решение имеет вид: $y=-2\cos x$. ●

Найти частные решения дифференциальных уравнений:

2.1.23. $2\sqrt{y}\,dx-dy=0$, $y(0)=1$.

2.1.24. $y'=8\sqrt{y}$, $y(0)=4$.

2.1.25. $y'\sin x-y\ln y=0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

2.1.26. $(1+y^2)\,dx+(1+x^2)\,dy=0$, $y(1)=2$.

2.1.27. Определить численность населения России через 20 лет, считая, что скорость прироста населения пропорциональна его наличному количеству, и зная, что население России в 2000 году составляло 145 млн человек, а прирост населения за 2000 год был равен $\alpha\%$. (Вычислить при $\alpha = 2\%$, $\alpha = -1\%$.)

◑ Обозначим численность населения России в момент времени t через $N = N(t)$. Дифференциальное уравнение исследуемого процесса (скорость «прироста» численности населения) имеет вид $\frac{dN}{dt} = kN$, где $k > 0$ — коэффициент пропорциональности (см. задачу 2.1.9). Отсюда находим, что $\frac{dN}{N} = k\,dt$, откуда $\ln|N| - \ln|C| = kt$, т.е. $\left|\ln\frac{N}{C}\right| = kt$, т.е., учитывая, что $N > 0$, имеем $N = Ce^{kt}$ — общее решение уравнения. Согласно условию задачи $N = 145$ при $t = 0$. Находим частное решение: $145 = Ce^0$, т.е. $C = 145$, $N = 145e^{kt}$. Найдем значение коэффициента k, зная, что в конце 2000 года, т.е. при $t = 1$, население России равно $N = 145 + \frac{\alpha}{100} \cdot 145$ млн человек: $145 + \frac{\alpha}{100} \cdot 145 = 145e^k$. Отсюда $e^k = 1 + \frac{\alpha}{100}$, т.е. $k = \ln\left(1 + \frac{\alpha}{100}\right)$. Равенство $N = 145e^{kt}$ теперь можно переписать так: $N = 145\left(1 + \frac{\alpha}{100}\right)^t$. Таким образом через 20 лет численность населения составит:

при $\alpha = 2\%$: $N = 145 \cdot (1{,}02)^{20} \approx 215$ (млн человек);

при $\alpha = -1\%$: $N = 145 \cdot (0{,}99)^{20} \approx 119$ (млн человек). ●

2.1.28. Тело движется со скоростью, пропорциональной пройденному пути. Какой путь пройдет тело за 5 секунд от начала движения, если известно, что за 1 секунду оно проходит путь 8 м, а за 3 секунды — 40 м?

2.1.29. Известно, что тело охлаждается в течение 15 мин от 100° до 80°. Через сколько минут температура тела понизится до 40°, если температура окружающей среды составляет 10°? (Скорость охлаждения тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды, см. задачу 2.1.9.)

Дополнительные задачи

2.1.30. В заданном семействе кривых найти линию, удовлетворяющую начальному условию:

а) $y(1 - Cx) = 1$, $y(2) = \frac{1}{3}$; **б)** $y^2 - x^2 = C$, $y(0) = 1$.

2.1.31. Убедиться, что заданная функция является решением соответствующего дифференциального уравнения:

а) $y = x + x\int \frac{e^x}{x}\,dx$, $xy' - y = xe^x$;

б) $\ln(4x+8y+5)+8y-4x = C$, $(x+2y+1)dx-(2x+4y+3)dy = 0$.

2.1.32. Составить дифференциальное уравнение семейства кривых, для которых отрезок любой касательной, заключенный между координатными осями, делится пополам в точке касания. (Использовать геометрический смысл производной).

2.1.33. Решить дифференциальное уравнение:

а) $\dfrac{dy}{dx} = 2\cos x$; б) $\sin y' = 1$.

2.1.34. При каком значении C заданная функция является решением данного уравнения:

а) $s = Ct + 4$, $s' = -1$; б) $y = x^3$, $y' = Cx^2$.

2.1.35. Написать уравнение геометрического места точек (x, y), являющихся точками максимума или минимума решений уравнения $y' = f(x, y)$.

2.1.36. Как доказать, что $xy + \ln\dfrac{y}{x} = C$ есть общий интеграл уравнения $x(1 + xy)y' = y(1 - xy)$?

2.1.37. Зная, что $y = C\ln x$ является общим решением уравнения

$$xy'\ln x = y,$$

найти интегральную кривую, проходящую через точку $M(e, 1)$.

2.1.38. Какая из функций:

$$y = e^x, \quad y = 2, \quad y = \frac{1}{x+1}, \quad y = \sqrt{\ln(x+1)}$$

является решением дифференциального уравнения

$$y\,dy = \frac{dx}{2(x+1)}?$$

2.1.39. Решить уравнения:

а) $2y' = 0$; б) $y' = x$;

в) $y' = y$.

2.1.40. Какие из приведенных уравнений являются уравнениями с разделяющимися переменными?

а) $y' = 3y - 1$; б) $x\,dy + y\,dx = y^2\,dx$;

в) $(1 - x^2)y' + xy = 1$; г) $xy' + y = \cos y$;

д) $y' = (x + y)^2$; е) $y' + x^2y = e^x$;

ж) $y' - xy^2 = 2xy$; з) $e^{-y}\left(1 + \dfrac{dy}{dx}\right) = 1$;

и) $x^2y' - 1 = \cos 2y$; к) $y = xe^{y'}$.

Решить дифференциальные уравнения:

2.1.41. $(\sqrt{xy} + \sqrt{x})y' - y = 0$.

2.1.42. $y' = 3^{x-y}$.

2.1.43. $y' = \dfrac{y+1}{x+1}$.

2.1.44. $ds + s\,\mathrm{tg}\,t\,dt = 0$.

2.1.45. $\dfrac{yy'}{x} + e^y = 0$.

2.1.46. $x + xy + y'(y + xy) = 0$.

2.1.47. $y' + y = 5$.

2.1.48. $v' - 4tv = 0$.

2.1.49. $dy - y\cos^2 x\,dx = 0$.

2.1.50. $y' = \sin\dfrac{x-y}{2} - \sin\dfrac{x+y}{2}$.

2.1.51. $(e^x + 1)e^y y' + e^x(1 + e^y) = 0$.

2.1.52. $y' + \dfrac{x\sin x}{y\cos y} = 0$.

2.1.53. $y' = \cos(y-x)$. (Положить $y - x = t$.)

2.1.54. $(xy+x)\dfrac{dx}{dy} = 1$.

2.1.55. $6x\,dx - 6y\,dy - 2x^2y\,dy + 3xy^2\,dx = 0$.

2.1.56. $x^2\,dy + (y-a)\,dx = 0$.

2.1.57. $y'\operatorname{tg} x - y = a$.

2.1.58. $y'\cos x - (y+1)\sin x = 0$.

2.1.59. $y' - 2y\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x$.

2.1.60. $y - xy' = 1 + x^2y'$.

2.1.61. $\dfrac{dx}{x(y-1)} = \dfrac{dy}{y(x+2)}$.

2.1.62. $y' = \dfrac{y\ln^3 y}{\sqrt{x+1}}$.

2.1.63. $2x + 2xy^2 + \sqrt{2-x^2}y' = 0$.

Найти частные решения дифференциальных уравнений:

2.1.64. $x^2\,dy - y^2\,dx = 0$, $y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}$.

2.1.65. $1 + y^2 = xyy'$, $y(2) = 1$.

2.1.66. $(x + xy^2)\,dx + (x^2y - y)\,dy = 0$, $y(0) = 1$.

2.1.67. $y'(x^2 - 2) = 2xy$, $y(2) = 2$.

2.1.68. $\cos x\sin y\,dy = \cos y\sin x\,dx$, $y(\pi) = \pi$.

2.1.69. $y' = 1{,}5\sqrt[3]{y}$, $y(-2) = 1$.

2.1.70. $y' = 2^{x+y} + 2^{x-y}$, $y(0) = 0$.

2.1.71. $xy' - \dfrac{y}{\ln x} = 0$, $y(e) = 1$.

2.1.72. $y'\sin x - (2y+1)\cos x = 0$, $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$.

2.1.73. $(e^x + 8)\,dy - ye^x\,dx = 0$, $y(0) = 1$.

2.1.74. Найти кривую, проходящую через точку $A(2,16)$, зная, что угловой коэффициент касательной в любой точке кривой:

а) в три раза больше углового коэффициента прямой, соединяющей эту же точку с началом координат;

б) равен квадрату ординаты этой точки.

2.1.75. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $A(4,1)$, для которой:

а) отрезок любой касательной к кривой, заключенный между осями координат, делится точкой касания пополам;

б) отрезок касательной между точкой касания и осью абсцисс делится пополам в точке пересечения с осью ординат.

2.1.76. *Подкасательной* кривой $y = f(x)$ в точке M называется проекция AP на ось Ox отрезка AM касательной к этой кривой, где A точка пересечения касательной с осью Ox (рис. 5) Найти семейство кривых, у которых подкасательная имеет длину, равную 2.

2.1.77. Найти кривую, проходящую через точку $A(1,1)$, для которой площадь треугольника, образованного касательной, ординатой точки касания и осью абсцисс, равна 1.

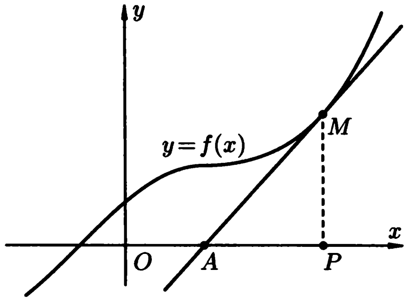

Рис. 5

2.1.78. Найти кривую, у которой сумма длин касательной (точнее, длины ее отрезка от точки касания до точки пересечения с осью абсцисс) и подкасательной в любой ее точке равна произведению координат точки касания.

2.1.79. Скорость распада радия пропорциональна наличной его массе. Определить, через сколько лет от 1 кг радия останется 0,7 кг, если известно, что период полураспада радия (время, за которое масса радия уменьшается вдвое) равен 1590 лет.

2.1.80. Скорость размножения некоторых бактерий пропорциональна количеству бактерий, имеющихся в наличии в рассматриваемый момент времени t. Количество бактерий за 4 часа утроилось. Найти зависимость количества бактерий от времени, если при $t = 0$ их было a.

2.1.81. Моторная лодка движется в спокойной воде со скоростью 20 км/час. Через одну минуту после выключения двигателя ее скорость уменьшилась до 2 км/час. Определить скорость лодки через две минуты после остановки двигателя, считая, что сопротивление воды пропорционально скорости движения лодки.

2.1.82. Металлическая болванка, нагретая до 420°C, охлаждается в воздухе, температура которого 20°C. Через 15 минут после начала охлаждения температура детали понизилась до 120°C. Определить температуру болванки через 30 минут охлаждения, считая, что скорость охлаждения пропорциональна разности между температурой тела и температурой воздуха.

2.1.83. При брожении скорость прироста действующего фермента пропорциональна его количеству. Через t_1 часов после начала брожения масса фермента составила m_1 г, а через t_2 часов $(t_2 > t_1)$ — m_2 г $(m_2 > m_1)$. Какова была первоначальная масса фермента?

2.1.84. Вращающийся в жидкости диск замедляет свое движение под действием силы трения, пропорциональной угловой скорости вращения w. Известно, что диск, начавший вращаться со скоростью 18 об/с, по истечении 45 с вращается со скоростью 6 об/с. С какой угловой скоростью будет вращаться диск по истечении 90 с после начала замедления? В какой момент времени w будет равняться 1 об/с?

Контрольные вопросы и более сложные задачи

2.1.85. Могут ли интегральные кривые дифференциального уравнения $y' = f(x)$ пересекаться?

2.1.86. Можно ли множество всех решений уравнения $y' = y$ представить в виде:

а) $y = Ce^x$; **б)** $y = C_1e^x + C_2$;

в) $y = \sqrt{C}e^x$; **г)** $y = \sin C \cdot e^x$;

д) $y = e^{x+C}$; **е)** $y = \dfrac{1}{C}e^x$?

2.1.87. В резервуаре находится 80 л раствора, содержащего 8 кг соли. Каждую минуту в него вливается 4 л воды и вытекает 4 л раствора, при этом концентрация соли поддерживается равномерной (путем перемешивания). Сколько соли останется в резервуаре через 40 минут?

2.1.88. Скорость истечения воды из сосуда через малое отверстие определяется формулой $v = 0{,}6\sqrt{2gh}$, где h — высота столба жидкости над отверстием, g — ускорение свободного падения ($g \approx \approx 10$ м/с^2). За какое время вытечет вся вода из

а) заполненного полусферического котла диаметра 2 м через круглое отверстие на дне 0,1 м;

б) цилиндрического бака радиуса $R = 0{,}5$ м и высотой $H = 2$ м через круглое отверстие в дне радиуса $r = 0{,}02$ м.

2.1.89. Тело движется по прямой со скоростью, обратно пропорциональной пройденному пути. В начальный момент тело имело скорость $v_0 = 15$ м/с и находилось на расстоянии 4 м от начала отсчета пути. Определить скорость тела через 8 с после начала движения.

2.1.90. Судно водоизмещением 10 000 тонн движется прямолинейно со скоростью 10 м/с. Сопротивление воды пропорционально квадрату скорости судна и равно 20 000 Н при скорости 1 м/с. Какое расстояние пройдет судно после выключения двигателя, прежде чем его скорость уменьшится до 2 м/с?

2.1.91. Решить уравнение $2\operatorname{ch} y\,dx = (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})\,dy$.

2.1.92. Решить уравнения:

а) $y' = y\sin x^2$;

б) $(2x - y)\,dx + (4x - 2y + 3)\,dy = 0$ (положить $2x - y = t$);

в) $y' = \dfrac{\cos y - \sin y - 1}{\cos x - \sin x + 1}$;