§ 7. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

Предварительные сведения

$\Rrightarrow$ *Линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка* называется уравнение вида

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \tag{7.1}$$

где функции $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ непрерывны на некотором отрезке $[a, b]$. $\Lleftarrow$

При этих условиях существует единственное решение уравнения (7.1), удовлетворяющее заданным начальным условиям: $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$ при $x_0 \in [a, b]$.

Функция $f(x)$ называется *правой частью уравнения (7.1)*, а соответствующее уравнение называется также линейным дифференциальным уравнением второго порядка с правой частью. При $f(x) \equiv 0$ приходим к линейному однородному дифференциальному уравнению второго порядка (или уравнению без правой части)

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{7.2}$$

Линейно независимые функции

$\Rrightarrow$ Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются *линейно независимыми* на отрезке $[a, b]$, если тождество

$$C_1y_1(x) + C_2y_2(x) \equiv 0, \quad x \in [a, b], \tag{7.3}$$

имеет место тогда и только тогда, когда $C_1 = C_2 = 0$.

Если же существуют такие числа C_1 и C_2, из которых хотя бы одно отлично от нуля, что для всех $x \in [a, b]$ имеет место тождество (7.3), то функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются *линейно зависимыми* на отрезке $[a, b]$. $\Lleftarrow$

Данные определения равносильны следующим:
функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются линейно независимыми (зависимыми) на отрезке $[a, b]$, если

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \not\equiv \text{const} \quad \left(\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \equiv \text{const}\right), \quad x \in [a, b].$$

О линейной зависимости или независимости функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ можно судить по определителю

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{vmatrix},$$

который называется *определителем Вронского* (или просто *вронскианом*).

Теорема 2.3. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно зависимы на отрезке $[a, b]$, то $W[y_1, y_2] = 0$ для всех x из $[a, b]$.

Теорема 2.4. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимые на отрезке $[a,b]$ решения дифференциального уравнения (7.2), то определитель Вронского этих функций отличен от нуля во всех точках отрезка $[a,b]$.

Структура общего решения линейного дифференциального уравнения

Теорема 2.5. Общее решение $y_{оо}$ линейного однородного дифференциального уравнения (7.2) имеет вид

$$y_{оо} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

где $y_1(x)$, $y_2(x)$ — линейно независимые решения этого уравнения.

Таким образом, для того, чтобы получить общее решение однородного уравнения (7.2), достаточно найти любые два линейно независимых частных решения этого уравнения (в этом случае говорят, что они образуют *фундаментальную систему решений* уравнения (7.2)).

В некоторых случаях удается тем или иным способом найти только одно частное решение $y_1(x)$. Тогда другое частное решение $y_2(x)$ можно найти по формуле

$$y_2(x) = y_1(x) \cdot \int \frac{1}{y_1^2(x)} \cdot \exp\left[-\int\limits_{x_0}^{x} p(x)\,dx\right] dx,$$

где $x_0 \in [a,b]$. Оба решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ при этом линейно независимы.

Теорема 2.6. Общее решение $y_{он}$ линейного неоднородного дифференциального уравнения (7.1) представляется в виде суммы

$$y_{он} = y_{оо} + y_{ч},$$

где $y_{оо}$ — общее решение соответствующего однородного уравнения (7.2), а $y_{ч}$ — некоторое частное решение неоднородного уравнения (7.1).

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

⇛ Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение (ЛОДУ) второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + py' + qy = 0. \qquad (7.4)$$

Квадратное уравнение

$$k^2 + pk + q = 0 \qquad (7.5)$$

называется *характеристическим уравнением* для уравнения (7.4). ⇚

Для составления общего решения y_{oo} дифференциального уравнения (7.4) необходимо найти корни k_1 и k_2 соответствующего характеристического уравнения (7.5) и применить следующую теорему:

Теорема 2.7. Пусть k_1 и k_2 — корни характеристического уравнения для уравнения (7.4). Тогда общее решение уравнения (7.4) находится по одной из следующих трех формул:

1) Если k_1 и k_2 — действительные и $k_1 \neq k_2$, то

$$y_{oo} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x};$$

2) если $k_1 = k_2$, то

$$y_{oo} = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x);$$

3) если $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ — комплексно-сопряженные корни, то

$$y_{oo} = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения (ЛНДУ) второго порядка с постоянными коэффициентами

Поскольку общее решение y_{oo} линейного однородного уравнения (7.4) легко находится по теореме 2.7, то в силу теоремы 2.6 для нахождения общего решения линейного неоднородного уравнения

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{7.6}$$

остается найти какое-нибудь одно его частное решение $y_ч$. В тех случаях, когда правая часть $f(x)$ имеет специальный вид, частное решение $y_ч$ неоднородного уравнения находится *методом неопределенных коэффициентов*. Этот метод называется также методом подбора частного решения неоднородного уравнения и сводится к следующим двум случаям.

Случай 1. $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$, где $P_n(x)$ — многочлен степени n.

а) Если α не является корнем уравнения (7.5), то частное решение $y_ч$ можно искать в виде

$$y_ч = e^{\alpha x} Q_n(x),$$

где $Q_n(x)$ — многочлен степени n с неизвестными коэффициентами.

б) Если α — корень уравнения (7.5) кратности k, то частное решение $y_ч$ можно искать в виде

$$y_ч = x^k e^{\alpha x} Q_n(x).$$

В частности, если $f(x) = P_n(x)$, т. е. $\alpha = 0$, то $y_ч$ имеется в виде $y_ч = Q_n(x)$ (если $\alpha = 0$ не является корнем характеристического уравнения) или в виде $y_ч = x^k \cdot Q_n(x)$ (если $\alpha = 0$ — корень кратности k характеристического уравнения).

Случай 2. $f(x) = e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x]$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — многочлены степени n и m, соответственно. Положим $N = \max(n, m)$.

а) Если $\alpha \pm \beta i$ не являются корнями уравнения (7.5), то

$$y_{ч} = e^{\alpha x}[P_N(x)\cos\beta x + Q_N(x)\sin\beta x].$$

б) Если $\alpha \pm \beta i$ — корни уравнения (7.5) кратности k, то

$$y_{ч} = x^k e^{\alpha x}[P_N(x)\cos\beta x + Q_N(x)\sin\beta x].$$

В частности, если $f(x) = a\cos\beta x + b\sin\beta x$, т. е. $\alpha = m = n = 0$, то частное решение ищется в виде $y_{ч} = A\cos\beta x + B\sin\beta x$ (если числа $\pm\beta i$ не являются корнями характеристического уравнения) или в виде $y_{ч} = (A\cos\beta x + B\sin\beta x)\cdot x$ (если числа $\pm\beta i$ — корни характеристического уравнения).

Теорема 2.8. Если $y_{ч1}$ и $y_{ч2}$ — частные решения соответственно уравнений

$$y'' + py' + qy = f_1(x)$$

и

$$y'' + py' + qy = f_2(x),$$

то функция $y_{ч} = y_{ч1} + y_{ч2}$ — частное решение уравнения

$$y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x).$$

Метод вариации произвольных постоянных для определения частного решения неоднородного уравнения

В общем случае, в том числе тогда, когда правая часть ЛНДУ имеет вид, не предусмотренный предыдущим пунктом, для отыскания частного решения используют *метод вариации* (т. е. изменения) *произвольных постоянных* (или *метод Лагранжа*). Суть его в следующем. Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — фундаментальная система решений однородного уравнения (7.4). Тогда частное решение можно представить в виде

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2,$$

где функции $C_1(x)$ и C_2 находятся из системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x). \end{cases}$$

Разумеется, метод вариации произвольных постоянных можно применять и в случае, когда правая часть ЛНДУ имеет вид, рассмотренный в предыдущем пункте.

Уравнение Эйлера

⇛ Дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$x^2y'' + pxy' + qy = 0$$

называется *уравнением Эйлера.* ⇚

Подстановкой $y = e^t$ оно сводится к ЛОДУ с постоянными коэффициентами.

Обобщенное дифференциальное уравнение Эйлера второго порядка

$$(ax+b)^2y + p(ax+b)y' + qy = 0$$

приводится к ЛОДУ с постоянными коэффициентами подстановкой $ax+b = e^t$.

Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами порядка выше второго

Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами порядка $n \geqslant 2$

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x)$$

решаются аналогично уравнениям второго порядка, опираясь на соответствующие определения и теоремы. В частности:

⇛ 1. Система функций $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, $\ldots$, $y_n = y_n(x)$ называется *линейно зависимой* на отрезке $[a,b]$, если существуют постоянные C_1, $C_2, \ldots$, C_n, не все равные нулю такие, что имеет место тождество

$$C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n \equiv 0, \quad x \in [a,b].$$

Если же это тождество имеет место только при $C_1 = C_2 = \ldots = C_n = 0$, то данные функции *линейно независимы* на отрезке $[a,b]$. ⇚

⇛ *Вронскиан* системы функций y_1, y_2, $\ldots$, y_n имеет вид

$$W(x) = W[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & & y_n \\ y_1' & y_2' & & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$ ⇚

⇛ 2. *Характеристическое уравнение,* соответствующее однородному дифференциальному уравнению n-го порядка

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = 0, \tag{7.7}$$

имеет вид

$$k^n + a_1k^{n-1} \ldots + a_{n-1}k + a_n = 0. \tag{7.8}$$

Теоремы 2.3–2.6, сформулированные для уравнений второго порядка, также имеют место и при любом $n > 2$. $\Leftarrow$

3. Метод вариации произвольных постоянных для неоднородного линейного дифференциального уравнения третьего порядка с постоянными коэффициентами

$$y''' + py'' + qy' + ry = f(x) \tag{7.9}$$

состоит в следующем: общее решение уравнения (7.9) имеет вид

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + C_3(x)y_3,$$

где y_1, y_2, y_3 — фундаментальная система решений однородного уравнения

$$y''' + py'' + qy' + ry = 0,$$

а функции $C_1(x)$, $C_2(x)$, $C_3(x)$ — находятся из системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 + C_3'y_3 = 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' + C_3'y_3' = 0, \\ C_1'y_1'' + C_2'y_2'' + C_3'y_3'' = f(x). \end{cases}$$

2.7.1. Установить линейную зависимость или независимость данных пар функций на областях их определения.

а) x, $\cos x$; **б)** x, $2x$;

в) $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.

❍ **а)** Функции $y_1(x) = x$ и $y_2(x) = \cos x$ определены на всей прямой, т. е. при $x \in (-\infty, +\infty)$. Тождество $C_1x + C_2\cos x \equiv 0$ имеет место только при $C_1 = C_2 = 0$. В самом деле, если предположить противное, т. е. что это тождество имеет место, например, при $C_2 \neq 0$, то после его дифференцирования получим новое тождество $C_1 - C_2 \sin x \equiv 0$, откуда $\sin x \equiv \dfrac{C_1}{C_2}$, $x \in (-\infty, +\infty)$, что неверно. Если же предположить, что $C_2 = 0$, то получим $C_1x \equiv 0$, что также невозможно при $C_1 \neq 0$. Таким образом, тождество $C_1x + C_2\cos x \equiv 0$ имеет место только при $C_1 = C_2 = 0$, и, стало быть, функции x и $\cos x$ линейно независимы на действительной прямой.

Заметим, что $\frac{\cos x}{x} \not\equiv \text{const}$ и $\frac{x}{\cos x} \not\equiv \text{const}$, т. е. функции x и $\cos x$ удовлетворяют и другому определению линейной независимости.

б) Имеем $\frac{2x}{x} \equiv 2$ при $x \neq 0$ (тождество можно доопределить по непрерывности и при $x = 0$), поэтому функции $y_1 = 2x$ и $y_2 = x$ — линейно зависимы.

в) Ввиду периодичности функций $y_1 = \operatorname{tg} x$ и $y_2 = \operatorname{ctg} x$ с периодом $T = \pi$ достаточно установить их линейную независимость в интервале $x \in (0, \pi)$ $\left(x \neq \frac{\pi}{2}\right)$. Имеем $\dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} x} = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x \not\equiv \text{const}$ $x \in (0, \pi)$,

$x \neq \frac{\pi}{2}$. Таким образом, функции $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ линейно независимы в области их определения $\left(x \neq n \cdot \frac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}\right)$. ●

Установить, какие из следующих пар функций линейно независимы, а какие — линейно зависимы:

2.7.2. $\arcsin x$ и $\arccos x$.

2.7.3. $\sin x$, $\sin 2x$.

2.7.4. e^x, e^{x^2}.

2.7.5. 1, x.

2.7.6. $\sin x$, $\sin^2 x$.

2.7.7. $\sin x \cos x$, $\sin 2x$.

2.7.8. $1 - \cos 2x$, $\sin^2 x$.

2.7.9. $1 + \cos 2x$, $\cos^2 x$.

2.7.10. Даны функции $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-2x}$. Составить однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, общее решение которого имеет вид

$$y_{\text{оо}} = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$

○ Заметим сначала, что данные функции линейно независимы на всей прямой, так как $\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^x}{e^{-2x}} = e^{3x} \not\equiv \text{const}$. Пусть $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$ — общее решение некоторого ЛОДУ второго порядка. Тогда

$$\begin{cases} y' = C_1 e^x - 2C_2 e^{-2x}, \\ y'' = C_1 e^x + 4C_2 e^{-2x}. \end{cases}$$

Разрешим эту систему относительно постоянных C_1 и C_2. Вычитая первое уравнение из второго, получаем $6C_2 e^{-2x} = y'' - y'$. Отсюда

$$C_2 = \frac{1}{6}(y'' - y')e^{2x}.$$

Теперь первое уравнение, домноженное на 2, прибавим ко второму:

$$2y' + y'' = 3C_1 e^x.$$

Отсюда $C_1 = \frac{1}{3}(2y' + y'')e^{-x}$. Полученные выражения для C_1 и C_2 подставим в выражение для y:

$$y = \frac{1}{3}(2y' + y'') + \frac{1}{6}(y'' - y'),$$

т. е. $y'' + y' - 2y = 0$. В итоге мы получили дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют функции $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-2x}$.

Поскольку решения $y_1 = e^x$ и $y_2 = e^{-2x}$ этого уравнения линейно независимы, то в силу теоремы 2.5 функция $y_{\text{оо}} = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$ — действительно его общее решение. Отсюда следует, что это и есть искомое дифференциальное уравнение. ●

Составить линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, для которого данные функции составляют фундаментальную систему решений, предварительно проверив, что данные функции линейно независимы:

2.7.11. $\sin x$, $\cos x$.

2.7.12. e^{-x}, e^{x}.

2.7.13. 1, x.

2.7.14. xe^{x}, e^{x}.

2.7.15. e^{2x}, e^{x}.

2.7.16. e^{2x}, xe^{2x}.

2.7.17. $\sin 2x$, $\cos 2x$.

2.7.18. Найти общее решение уравнения $2y'' - 3y' + y = 0$.

❍ Составим характеристическое уравнение: $2k^2 - 3k + 1 = 0$. По его корням $k_1 = 1$ и $k_2 = \frac{1}{2}$ составим общее решение данного однородного уравнения, согласно теореме 2.8:

$$y_{\text{оо}} = C_1 e^{x} + C_2 e^{\frac{1}{2}x}. \quad \bullet$$

Найти общие решения уравнений:

2.7.19. $y'' - 5y' + 6y = 0$.

2.7.20. $2y'' + 5y' - 7y = 0$.

2.7.21. $y'' + 4y' - 3y = 0$.

2.7.22. $3y'' + y' - 2y = 0$.

2.7.23. $y'' + 25y' = 0$.

2.7.24. $4y'' - 9y' = 0$.

2.7.25. Найти общее решение уравнения $4y'' + 4y' + y = 0$.

❍ Характеристическое уравнение $4k^2 + 4k + 1 = 0$ имеет два одинаковых корня $k_1 = k_2 = -\frac{1}{2}$. В таком случае (см. теорему 2.8)

$$y_{\text{оо}} = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{1}{2}x}, \quad \text{или} \quad y_{\text{оо}} = (C_1 + C_2 x)e^{-\frac{1}{2}x}. \quad \bullet$$

Найти общие решения уравнений:

2.7.26. $y'' - 6y' + 9y = 0$.

2.7.27. $y'' - 4y' + 4y = 0$.

2.7.28. $4y'' - 12y' + 9y = 0$.

2.7.29. $9y'' + 12y' + 4y = 0$.

2.7.30. Найти общее решение уравнения $2y'' + y' + 3y = 0$.

❍ Характеристическое уравнение $2k^2 + k + 3 = 0$ имеет комплексные (комплексно-сопряженные) корни:

$$k_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{23}\,i}{4}.$$

В этом случае общее решение уравнения имеет вид

$$y_{\text{оо}} = \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{23}}{4}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{23}}{4}x\right) e^{-\frac{1}{4}x}. \quad \bullet$$

Найти общие решения уравнений:

2.7.31. $y'' + 4y = 0$.

2.7.32. $4y'' + 9y = 0$.

2.7.33. $y'' + y' + y = 0$.

2.7.34. $y'' - y' + 6y = 0$.

2.7.35. $2y'' - 3y' + 5y = 0$. **2.7.36.** $5y'' - 3y' + 2y = 0$.

2.7.37. Найти частное решение уравнения $3y''+7y'+4y = 0$, удовлетворяющее заданным начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = -\frac{2}{3}$.

◐ Характеристическое уравнение $3k^2+7k+4 = 0$ имеет корни $k_1 = -1$ и $k_2 = -\frac{4}{3}$. Следовательно, общее решение имеет вид $y_{\text{oo}} = C_1e^{-x}+C_2e^{-\frac{4}{3}x}$. Находим $y'_{\text{oo}} = -C_1e^{-x} - \frac{4}{3}C_2e^{-\frac{4}{3}x}$. Подставляя в последних двух равенствах $x = 0$, $y = 1$, $y' = -\frac{2}{3}$, получаем систему уравнений относительно C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ -C_1 - \frac{4}{3}C_2 = -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2, \\ C_2 = -1. \end{cases}$$

Найденные константы подставляем в выражение для общего решения. Получаем искомое частное решение

$$y_{\text{ч}} = 2e^{-x} - e^{-\frac{4}{3}x}.$$ ●

Найти частные решения данных дифференциальных уравнений, удовлетворяющие заданным начальным условиям:

2.7.38. $y'' - 4y' + 3y = 0$, $y(0) = 6$, $y'(0) = 10$.

2.7.39. $y'' + 4y' = 0$, $y(0) = 7$, $y'(0) = 8$.

2.7.40. $y'' - 6y' + 9y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

2.7.41. $4y'' + 4y' + y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

2.7.42. $y'' - 4y' + 3y = 0$, $y(0) = 6$, $y'(0) = 10$.

2.7.43. Найти общее решение уравнения $y''-7y' = 5xe^x$, подбирая частное решение методом неопределенных коэффициентов.

◐ Характеристическое уравнение $k^2 - 7k = 0$ имеет два действительных корня $k_1 = 0$ и $k_2 = 7$, поэтому общее решение однородного уравнения $y'' - 7y' = 0$ имеет вид $y_{\text{oo}} = C_1 + C_2e^{7x}$. Правая часть неоднородного уравнения имеет вид $f(x) = P_1(x)e^{kx}$, где $P_1(x) = 5x$ — многочлен первой степени, а $k = 1$ — не является корнем характеристического уравнения. Значит, частное решение ищем в таком же виде: $y_{\text{ч}} = (Ax + B)e^x$ ($Ax + B = Q_1(x)$ — многочлен первой степени с неизвестными коэффициентами). Для определения коэффициентов A и B находим

$$y'_{\text{ч}} = Ae^x + (Ax + B)e^x = (A + Ax + B)e^x, \quad y''_{\text{ч}} = (2A + Ax + B)e^x,$$

после чего подставляем выражения для $y_{\text{ч}}$, $y'_{\text{ч}}$ и $y''_{\text{ч}}$ в исходное дифференциальное уравнение:

$$(2A + Ax + B)e^x - 7(A + Ax + B)e^x = 5xe^x.$$

После сокращения обеих частей на e^x и приравнивания коэффициентов при соответствующих степенях x в левой и правой части полученного равенства приходим к системе уравнений относительно неизвестных A и B:

$$x: \quad A - 7A = 5, \qquad \text{т. е.} \quad \begin{cases} -6A = 5, \\ -5A - 6B = 0. \end{cases}$$
$$x^0: \quad 2A + B - 7A - 7B = 0,$$

Отсюда $A = -\frac{5}{6}$, $B = \frac{25}{36}$, а $y_ч = \left(-\frac{5}{6}x + \frac{25}{36}\right)e^x$. Теперь в силу теоремы 2.6 общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y_{он} = C_1 + C_2e^{7x} + \left(-\frac{5}{6}x + \frac{25}{36}\right)e^x. \qquad \bullet$$

Найти общие решения уравнений, находя их частные решения методом неопределенных коэффициентов:

2.7.44. $y'' - 3y' + 2y = 10e^{-x}$. **2.7.45.** $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$.
2.7.46. $y'' - 3y' + 2y = 2x^3 - 30$. **2.7.47.** $y'' - 2y' + 2y = 2x$.
2.7.48. $y'' + 4y' - 5y = 1$. **2.7.49.** $2y'' - y' - y = 4xe^{2x}$.

2.7.50. Найти общее решение уравнения $y'' + 6y' + 9y = (x - 2)e^{-3x}$.

◯ Характеристическое уравнение $k^2 + 6k + 9 = 0$ имеет корень $k = -3$ кратности 2, откуда $y_{оо} = (C_1 + C_2x)e^{-3x}$. Правая часть исходного уравнения имеет вид $P_1(x)e^{\alpha x}$, где $P_1(x) = x - 2$— многочлен первой степени, а $\alpha = -3$ — корень кратности 2 характеристического уравнения. Поэтому частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $y_ч = x^2Q_1(x)e^{-3x}$, т. е. $y_ч = (Ax + B)x^2e^{-3x}$. Дальнейшие вычисления оформим следующим образом. Расположим $y_ч$, $y'_ч$, $y''_ч$, в столбик, слева от них запишем соответствующие коэффициенты исходного дифференциального уравнения, после чего составим систему уравнений относительно A и B, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной x левой и правой частей полученного равенства (при этом e^{-3x} можно сократить)

$$\begin{array}{c|l} 9 & y = (\underline{Ax^3} + \underline{\underline{Bx^2}})e^{-3x} \\ 6 & y'_ч = (\underline{\underline{3Ax^2}} + \underline{\underline{\underline{2Bx}}} - \underline{3Ax^3} - \underline{\underline{3Bx^2}})e^{-3x} \\ 1 & y''_ч = (\underline{9Ax^3} - \underline{\underline{18Ax^2}} + \underline{\underline{9Bx^2}} + \underline{\underline{\underline{6Ax}}} - \underline{\underline{\underline{12Bx}}} + 2B)e^{-3x}. \end{array}$$

В приведенных выражениях одинаковыми линиями подчеркнуты подобные члены.

$$\left.\begin{array}{ll} x^3: & 9A - 18A + 9A = 0, \\ x^2: & 9B + 18A - 18B - 18A + 9B = 0, \\ x^1: & 12B + 6A - 12B = 1, \\ x^0: & 2B = -2. \end{array}\right| \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} 0 = 0, \\ 0 = 0, \\ A = \frac{1}{6}, \\ B = -1. \end{array}\right.$$

Заметим, что получили систему из четырех уравнений с двумя неизвестными, при этом два уравнения тривиальны. Это признак правильности составления системы.

Таким образом, $y_ч = \left(\frac{1}{6}x - 1\right)x^2e^{-3x}$, откуда общее решение

$$y_{он} = (C_1 + C_2x)e^{-3x} + \left(\frac{1}{6}x - 1\right)x^2e^{-3x}. \qquad \bullet$$

Найти общие решения уравнений:

2.7.51. $y'' + 3y' - 4y = (x+1)e^x$.
2.7.52. $y'' - 2y' + y = (x+1)e^x$.
2.7.53. $y'' + 2y' + y = (x+3)e^{-x}$.
2.7.54. $2y'' + 3y' + y = (1-2x)e^{-x}$.
2.7.55. $y'' + 3y' + 2y = (1-4x)e^{-2x}$.
2.7.56. $y'' + 4y' + 4y = (1-4x)e^{-2x}$.

2.7.57. Решить уравнение $y'' + 3y' + 2y = (2x+3)\sin x + \cos x$.

Решая характеристическое уравнение $k^2+3k+2=0$, находим $k_1 = -1$, $k_2 = -2$, откуда $y_{oo} = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$. Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y_ч = (Ax+B)\sin x + (Cx+D)\cos x.$$

Так как неизвестные многочлены $P_N(x) = Ax + B$ и $Q_N(x) = Cx + D$ должны иметь степень $N = \max(m,n)$, где $m = 1$ — степень многочлена $P_1(x) = 2x + 3$, $n = 0$ — степень многочлена $Q_0(x) = 1$ (см. случай 2а на с. 97 при $\gamma = 0$; мы специально поменяли местами $P(x)$ и $Q(x)$, чтобы показать, что это не влияет на структуру $y_ч$). Далее

$$\begin{array}{r|l} 2 & y_ч = (Ax+B)\sin x + (Cx+D)\cos x, \\ 3 & y'_ч = A\sin x + (Ax+B)\cos x + C\cos x - (Cx+D)\sin x, \\ 1 & y''_ч = 2A\cos x - (Ax+B)\sin x - 2C\sin x - (Cx+D)\cos x. \end{array}$$

Теперь приравниваем коэффициенты при подобных членах в левой и правой частях соответствующего уравнения:

$$\begin{array}{rl} x\sin x: & 2A - 3C - A = 2, \\ \sin x: & 2B + 3A - 3D - B - 2C = 3, \\ x\cos x: & 2C + 3A - C = 0, \\ \cos x: & 2D + 3B + 3C + 2A - D = 1, \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A - 3C = 2, \\ 3A + B - 2C - 3D = 3, \\ 3A + C = 0, \\ 2A + 3B + 3C + D = 1. \end{cases}$$

Из первого и третьего уравнений находим: $A = \frac{1}{5}$, $C = -\frac{3}{5}$. Из второго и четвертого, с учетом полученных коэффициентов, имеем: $B = \frac{21}{25}$, $D = -\frac{3}{25}$. Таким образом,

$$y_{он} = \left(\frac{1}{5}x + \frac{21}{25}\right)\sin x - \left(\frac{3}{5}x + \frac{3}{25}\right)\cos x + C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}.$$ ●

Решить уравнения:

2.7.58. $y'' - 7y' + 6y = \sin x$. **2.7.59.** $2y'' + 5y' = 29\cos x$.
2.7.60. $y'' - 4y = e^{2x}\sin 2x$. **2.7.61.** $y'' - 2y' - 8y = -8\cos 2x$.
2.7.62. $y'' + 4y' + 4y = (2x+3)\sin x + \cos x$.
2.7.63. $y'' - 2y = 2x(\cos x - \sin x)e^x$.

2.7.64. Решить уравнение $y'' + 16y = 3x\sin 4x + \cos 4x$.

○ Корни характеристического уравнения $k^2+16=0$ мнимые: $k_{1,2}=\pm 4i$. С другой стороны, правая часть неоднородного уравнения имеет вид $f(x) = e^{0x}(P_0(x)\cos 4x + Q_1(x)\sin 4x)$. Значит, $\alpha \pm \beta i = \pm 4i$ — корни характеристического уравнения, поэтому (см. случай 2б, с. 97).

$$y_ч = x\big[(Ax+B)\cos 4x + (Cx+D)\sin 4x\big].$$

Имеем:

$$\begin{array}{r|l} 16 & y_ч = (Ax^2+Bx)\cos 4x + (Cx^2+Dx)\sin 4x, \\ 0 & y'_ч = (2Ax+B)\cos 4x - 4(Ax^2+Bx)\sin 4x + (2Cx+D)\sin 4x + \\ & \quad + 4(Cx^2+Dx)\cos 4x, \\ 1 & y''_ч = 2A\cos 4x - 8(2Ax+B)\sin 4x - 16(Ax^2+Bx)\cos 4x + \\ & \quad + 2C\sin 4x + 8(2Cx+D)\cos 4x - 16(Cx^2+Dx)\sin 4x. \end{array}$$

Отсюда

$$\begin{array}{r l} x^2\cos 4x: & 16A - 16A = 0, \\ x\cos 4x: & 16B - 16B + 16C = 0, \\ \cos 4x: & 2A + 8D = 1, \\ x^2\sin 4x: & 16C - 16C = 0, \\ x\sin 4x: & 16D - 16A - 16D = 3, \\ \sin 4x: & -8B + 2C = 0. \end{array} \Longrightarrow \begin{cases} C = 0, \\ 2A + 8D = 1, \\ -16A = 3, \\ -8B + 2C = 0, \end{cases}$$

откуда $A = -\frac{3}{16}$, $B = C = 0$, $D = \frac{11}{64}$.

Таким образом,

$$y_{он} = C_1\cos 4x + C_2\sin 4x - \frac{3}{16}x^2\cos 4x + \frac{11}{64}\sin 4x.$$ ●

Решить уравнения:

2.7.65. $y'' + 25y = \cos 5x$.

2.7.66. $y'' + y = 2x\cos x + \sin x$.

2.7.67. $y'' + y = x\sin x$.

2.7.68. $y'' + 9y = \frac{11}{12}\sin 3x - x\cos 3x$.

2.7.69. $y'' - 2y' + 5y = e^x\cos 2x$.

2.7.70. $5y'' - 6y' + 5y = e^{\frac{3}{5}x}\sin\frac{4}{5}x$.

2.7.71. Решить уравнение $y'' - 2y' + 5y = xe^x\cos 2x + x^2 - x + 2$.

○ Общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' - 2y' + 5y = 0$$

имеет вид (проверьте!) $y_{оо} = (C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)e^x$. Данное дифференциальное уравнение представим в виде совокупности двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} y'' - 2y' + 5y = xe^x\cos 2x, \\ y'' - 2y' + 5y = x^2 - x + 2. \end{array}\right.$$

Частное решение первого уравнения находим в виде

$$y_{ч1} = x[(Ax+B)\cos 2x + (Cx+D)\sin 2x]e^x,$$

так как $\alpha \pm \beta i = 1 \pm 2i$ — корень характеристического уравнения

$$k^2 - 2k + 5 = 0, \quad k = 1 \pm 2i.$$

Соответствующие вычисления, которые предлагаем выполнить самостоятельно, дают

$$y_{\text{ч}1} = x\left[\frac{1}{16}\cos 2x + \frac{1}{8}x\sin 2x\right]e^x.$$

Частное решение второго уравнения находим в виде

$$y_{\text{ч}2} = Ax^2 + Bx + C.$$

Аналогично находим $y_{\text{ч},2} = \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{25}x + \frac{38}{125}$. Общее решение исходного уравнения имеет вид $y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{ч}1} + y_{\text{ч}2}$, т. е.

$$y_{\text{он}} = (C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)e^x + \\ + x\left(\frac{1}{16}\cos 2x + \frac{1}{8}x\sin 2x\right)e^x + \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{25}x + \frac{38}{125}. \quad \bullet$$

Решить уравнения (данные уравнения, согласно правым частям, предлагаем целесообразным образом представить в виде совокупности более простых):

2.7.72. $y'' - 2y' + y = x^2 - x + 3 + x\cos x$.

2.7.73. $y'' + 5y' + 6y = (x-2)e^{-3x} + x^2 + 2x - 3$.

2.7.74. $y'' + 6y' + 10y = (x+6)\cos 3x - (18x+6)\sin 3x + 2xe^{-3x}\cos x$.

2.7.75. $y'' + 9y = e^{-3x}(x-2) + 14 + 63x^2$.

2.7.76. $y'' - 2y' + y = \sin x + \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$.

2.7.77. Решить уравнение $y'' - y' = \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}$.

○ Общее решение однородного уравнения $y'' - y' = 0$ имеет вид $y_{\text{оо}} = C_1 + C_2e^x$. Правая часть $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}$ неоднородного уравнения не позволяет найти частное решение $y_{\text{ч}}$ методом подбора (или неопределенных коэффициентов), поэтому воспользуемся методом вариации произвольных постоянных:

$$y_{\text{ч}} = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2,$$

где $y_1 = 1$, $y_2 = e^x$ — фундаментальная система решений однородного уравнения, а $C_1(x)$ и $C_2(x)$ — решения системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x), \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} C_1'\cdot 1 + C_2'\cdot e^x = 0, \\ C_1'\cdot 0 + C_2'\cdot e^x = \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}. \end{cases}$$

Из второго уравнения находим $C_2' = \dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$, откуда после интегрирования $C_2(x) = \displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx = \arcsin e^x$ (константу интегрирования полагаем равной нулю). Из первого уравнения системы получим $C_1' = -C_2'e^x = -\dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}$, т.е., интегрируя,

$$C_1(x) = -\int \frac{e^{2x}\,dx}{\sqrt{1-e^{2x}}} = \sqrt{1-e^{2x}}.$$

Тем самым, частное решение имеет вид

$$y_{\text{ч}} = C_1(x)\cdot 1 + C_2(x)e^x = \sqrt{1-e^{2x}} + e^x \arcsin e^x,$$

а общее решение

$$y_{\text{он}} = C_1 + C_2 x + \sqrt{1-e^{2x}} + e^x \arcsin e^x.$$ ●

Решить уравнения, используя метод вариации постоянных:

2.7.78. $y'' - y = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$.

2.7.79. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$.

2.7.80. $y'' - 6y' + 9y = \dfrac{e^{3x}}{x}$.

2.7.81. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

2.7.82. $y'' + y + \operatorname{ctg}^2 x = 0$.

2.7.83. $y'' - y' = e^{2x}\sqrt{1-e^{2x}}$.

2.7.84. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2+1}$.

2.7.85. Найти частное решение уравнения $y'' - 2y' - y = 6xe^x$, удовлетворяющее заданным начальным условиям: $y(0)=2$, $y'(0)=-5$.

◐ Запишем уравнение без правой части $y'' - 2y' - y = 0$. Его характеристическое уравнение имеет вид $k^2 - 2k - 1 = 0$, откуда $k_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$, т.е. $y_{\text{оо}} = C_1 e^{(1-\sqrt{2})x} + C_2 e^{(1+\sqrt{2})x}$. Частное решение неоднородного уравнения найдем методом подбора:

$$\begin{array}{r|l|}
-1 & y_{\text{ч}} = (Ax+B)e^x \\
-2 & y_{\text{ч}}' = (Ax+B+A)e^x \\
1 & y_{\text{ч}}'' = (Ax+2A+B)e^x
\end{array}
\Longrightarrow
\left|\begin{array}{rl}
x: & -A - 2A + A = 6, \\
x^0: & -B - 2B - 2A + 2A + B = 0.
\end{array}\right.$$

Следовательно, $A = -3$, $B = 0$ и $y_{\text{ч}} = -3xe^x$. Отсюда

$$y_{\text{он}} = C_1 e^{(1-\sqrt{2})x} + C_2 e^{(1+\sqrt{2})x} - 3xe^x.$$

Полученное выражение продифференцируем, а затем в $y_{\text{он}}$ и $y_{\text{он}}'$ подставим $x = 0$, $y = 1$, $y' = 1$ из начальных условий и из получающейся системы определим значения констант C_1 и C_2. Имеем:

$$y_{\text{он}}' = (1-\sqrt{2})C_1 e^{(1-\sqrt{2})x} + (1+\sqrt{2})C_2 e^{(1+\sqrt{2})x} - 3e^x - 3xe^x,$$

а соответствующая система, о которой говорили выше, имеет вид:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \quad (\text{заменили } x = 0,\ y_{\text{он}} = 2), \\ (1-\sqrt{2})C_1 + (1+\sqrt{2})C_2 - 3 = -5 \quad (\text{заменили } x = 0,\ y_{\text{он}}' = -5). \end{cases}$$

Первое уравнение, домноженное на $-(1+\sqrt{2})$, прибавим ко второму:

$$-2\sqrt{2}C_1 = -4 - 2\sqrt{2}, \quad C_1 = \frac{2\sqrt{2}+4}{2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}.$$

Далее $C_2 = 1 - C_1 = 1 - \sqrt{2}$. Искомое частное решение имеет вид

$$y = (1 + \sqrt{2})e^{(1-\sqrt{2})x} + (1 - \sqrt{2})e^{(1+\sqrt{2})x} - 3xe^x. \quad ●$$

Найти частные решения уравнений, удовлетворяющие заданным начальным условиям:

2.7.86. $y'' + y = 4xe^x$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 0$.

2.7.87. $y'' + y = 4\sin x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

2.7.88. $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$, $y(0) = \frac{26}{5}$, $y'(0) = \frac{39}{5}$.

2.7.89. $y'' + 2y' - 3y = 48x^2e^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -\frac{3}{2}$.

2.7.90. $y'' + 4y' + 4y = 32xe^{2x}$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$.

2.7.91. $y'' - y = 2e^x - x^2$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

2.7.92. $y'' + 3y' + 2y = 2\sin 3x + 6\cos 3x$, $y(0) = y'(0) = 0$.

2.7.93. $y'' + 9y = 6\cos 3x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

2.7.94. $y'' - y' = \frac{1}{1 + e^x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

2.7.95. $4y'' + y = \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$, $y(\pi) = 3$, $y'(\pi) = \frac{1}{2}$.

2.7.96. Найти общее решение уравнения Эйлера $x^2y'' + 2xy' + y = 0$.

❍ Положим $x = e^t$, откуда $t = \ln x$. Тогда неизвестная функция $y = y(x)$ становится сложной функцией аргумента t: $y = y(e^t)$. Следовательно,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dt}e^{-t},$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}e^{-t}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}e^{-t}\right)\frac{dt}{dx} = \left(\frac{d^2y}{dt^2}e^{-t} - e^{-t}\frac{dy}{dt}\right)e^{-t} =$$

$$= \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)e^{-2t}.$$

Исходное дифференциальное уравнение принимает вид

$$e^{2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)e^{-2t} + 2e^t \cdot \frac{dy}{dt}e^{-t} + y = 0,$$

т. е.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = 0, \quad \text{или} \quad y'' + y' + y = 0,$$

где $y = y(t)$. Общее решение полученного линейного уравнения с постоянными коэффициентами находим стандартным образом:

$$y_{\text{оо}} = e^{-\frac{t}{2}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

Остается вернуться к переменной x, используя замену $t = \ln x$. Получаем

$$y_{\text{оо}} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x + C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right). \quad ●$$

Решить уравнения:

2.7.97. $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$. **2.7.98.** $x^2y'' + 3xy' + y = 0$.
2.7.99. $xy'' + y' = 0$.

2.7.100. Решить обобщенное дифференциальное уравнение Эйлера

$$(3x-2)^2y'' - 2(3x-2)y' + 6y = 0.$$

◑ Положим $3x - 2 = e^t$, откуда $t = \ln(3x-2)$. Тогда $x = \frac{1}{3}(e^t + 2)$, $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{3}e^t$, $\frac{dt}{dx} = 3e^{-t}$. Далее

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = 3e^{-t} \cdot y'_t,$$

$$y''_{x^2} = \left(3e^{-t}y'_t\right)'_t \cdot t'_x = 3\left(-e^{-t} \cdot y'_t + e^{-t} \cdot y''_{t^2}\right)3e^{-t} = 9e^{-2t}(y''_{t^2} - y'_t).$$

Подставляем полученные выражения в исходное уравнение:

$$9(y''_{t^2} - y'_t) - 6y'_t + 6y = 0, \quad \text{т. е.} \quad 9y'' - 15y' + 6y = 0, \quad y = y(t).$$

Корни соответствующего характеристического уравнения $9k^2 - 15k + 6 = 0$, т. е. $3k^2 - 5k + 2 = 0$ равны $k_1 = 1$, $k_2 = \frac{2}{3}$, поэтому

$$y_{\text{оо}}(t) = C_1e^t + C_2e^{\frac{2}{3}t}.$$

После замены $t = \ln(3x-2)$ и преобразований получим окончательно

$$y_{\text{оо}}(x) = C_1(3x-2) + C_2\sqrt[3]{(3x-2)^2}.$$ ●

Решить уравнения:

2.7.101. $(2x+1)^2y'' - 2(2x+1)y' + 4y = 0$.
2.7.102. $x^2y'' + xy' + y = 0$. **2.7.103.** $x^2y'' - xy' - 3y = 0$.
2.7.104. $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$.

Дополнительные задания

Доказать линейную независимость данных функций на их области определения, найти определитель Вронского:

2.7.105. x, e^x, e^{-x}. **2.7.106.** x, xe^x, xe^{-x}.
2.7.107. $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arctg} 2x$, $\operatorname{arctg} 3x$. **2.7.108.** $1, x, x^2, \ldots, x^n$.
2.7.109. e^{k_1x}, e^{k_2x}, e^{k_3x} (k_1, k_2, k_3 — различные действительные числа).
2.7.110. $e^x, e^{2x}, e^{3x}, \ldots, e^{nx}$.
2.7.111. $\cos x, \cos 2x, \ldots, \cos nx$, $x \in [0, 2\pi]$.

Доказать линейную зависимость данных функций и найти определитель Вронского:

2.7.112. 1, $\arcsin x$, $\arccos x$, $x \in [-1, 1]$.

2.7.113. π, $\operatorname{arctg} 2x$, $\operatorname{arcctg} 2x$, $x \in (-\infty, +\infty)$.
2.7.114. $\sin^2 x$, $\cos^2 x$, $\cos 2x$, $\sin 2x$, $x \in (-\infty, +\infty)$.
2.7.115. $\sin 3\alpha$, $\sin \alpha$, $\sin^3 \alpha$, 1, $\alpha \in (-\infty, +\infty)$.
2.7.116. $\cos \alpha$, $\cos^3 \alpha$, $\cos 3\alpha$, 5, $\alpha \in (-\infty, +\infty)$.
2.7.117. $\ln x$, $\ln x^2$, $\ln^2 x$, $\ln^3 x$, $x \in (0, +\infty)$.
2.7.118. e^x, $e^x \sin^2 x$, $e^x \cos^2 x$, e^{-2x}, $x \in (-\infty, +\infty)$.

Показать, что не существует линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, для которого данная система функций является фундаментальной:

2.7.119. $\sin x$, $\sin 2x$.
2.7.120. $\cos x$, $\cos 2x$.
2.7.121. x, $\frac{1}{x}$.
2.7.122. x^2, $\frac{1}{x}$.
2.7.123. e^x, $\sin x$.
2.7.124. e^x, $\cos x$.
2.7.125. x, $\sin x$.
2.7.126. x, $\cos x$.
2.7.127. x, x^2, $\sin x$.
2.7.128. e^x, e^{-x}, $\cos x$.
2.7.129. x, x^2, $\cos x$.
2.7.130. x, e^x, $\sin x$.

Составить линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, фундаментальная система решений которого имеет вид:

2.7.131. e^{2x}, e^{-3x}, e^x.
2.7.132. 1, e^x, e^{3x}.
2.7.133. $\cos 2x$, $\sin 2x$, e^{-x}.
2.7.134. e^x, xe^x, $\sin x$, $\cos x$.
2.7.135. e^x, xe^x, x^2e^x, e^{3x}.
2.7.136. e^x, xe^x, $\sin 3x$, $\cos 3x$.

Составить линейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами по данному общему решению:

2.7.137. $y = C_1 x + \frac{C_2}{x^2}$.
2.7.138. $y = C_1(x+2) + \frac{C_2}{(x+2)^3}$.
2.7.139. $y = C_1 x^2 + C_2 x^4 + C_3$.
2.7.140. $y = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + 2x$.
2.7.141. $y = C_1 + C_2(x+1)^5 + \frac{C_3}{(x+1)^2}$.
2.7.142. $y = (C_1 \cos \ln x + C_2 \sin \ln x)x + x \ln x$.
2.7.143. $y = x(C_1 + C_2 \ln x + \ln^2 x)$.
2.7.144. $y = C_1 x + C_2 x^2 + 1 + (x^2 + 2x) \ln x$.

Решить уравнения:

2.7.145. $y'' - 4y' + 3y = 0$.
2.7.146. $y'' + 4y' + 29y = 0$.
2.7.147. $9y'' + 6y' = 0$.
2.7.148. $4y'' + 12y' + 9y = 0$.
2.7.149. $5y'' + y = 0$.
2.7.150. $5y'' + y' = 0$.
2.7.151. $y''' - 2y'' - 3y' = 0$.
2.7.152. $y''' + 4y'' + 13y' = 0$.
2.7.153. $y''' + 2y'' + y' = 0$.
2.7.154. $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$.
2.7.155. $y^{IV} - 16y = 0$.
2.7.156. $y^{IV} + y = 0$.

2.7.157. $2y''' + 9y'' + 17y' + 14y = 0.$
2.7.158. $y^{IV} + y'' = 0.$

Решить уравнения, а там, где есть начальные условия, найти соответствующее частное решение:

2.7.159. $y'' + y' = \left(x + \frac{3}{2}\right) e^x - 2x - 2.$
2.7.160. $y'' + y' = (1 - 4x)e^{-2x}.$ **2.7.161.** $y'' + y' = 3e^{-2x} \sin x.$
2.7.162. $y'' + y' = (2x + 3) \sin x + \cos x.$
2.7.163. $y'' - 2y' + y = \sin x + e^{-x}.$
2.7.164. $y''' + y'' = 12x^2.$
2.7.165. $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = e^{2x}.$
2.7.166. $y'' - 3y' + 2y = (x^2 + x)e^{3x}.$
2.7.167. $y'' - 2y' + 3y = e^{-x} \cos x.$
2.7.168. $y'' + y' = \cos^2 x + e^x + x^2.$
2.7.169. $y'' + 4y = x \sin^2 x.$
2.7.170. $y'' + 4y = x \cos x.$
2.7.171. $y'' - 2y' + 10y = \frac{1}{3} \cos 3x + 2 \sin 3x.$
2.7.172. $y'' - 3y' + 2y = \sin x \sin 2x.$
2.7.173. $y'' - 4y' + 5y = (4x + 22) \sin 3x - (28x + 84) \cos 3x.$
2.7.174. $y'' - 4y' + 5y = 2x^2 e^x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3.$
2.7.175. $y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3$, $y(0) = \frac{4}{3}$, $y'(0) = \frac{1}{27}.$
2.7.176. $y'' + 4y = 4(\sin 2x + \cos 2x)$, $y(\pi) = \pi$, $y'(\pi) = 2\pi.$
2.7.177. $y'' - 2y' + 2y = 4e^x \cos x$, $y(\pi) = \pi e^\pi$, $y'(\pi) = e^\pi.$
2.7.178. $y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 6$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3{,}2.$
2.7.179. $4y'' + 16y' + 15y = 4e^{-\frac{3}{2}x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -5{,}5.$
2.7.180. $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2.$
2.7.181. $y'' + y = \operatorname{ctg} x.$ **2.7.182.** $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}.$
2.7.183. $y'' + y = \frac{1}{\sin x}.$ **2.7.184.** $y'' - 2y = 4x^2 e^{x^2}.$
2.7.185. $y'' - 6y = 4x^3 e^{x^2}.$ **2.7.186.** $y'' + y = \frac{1}{\cos 2x \sqrt{\cos 2x}}.$

Контрольные вопросы и более сложные задания

2.7.187. Привести пример функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$, которые линейно зависимы на одном отрезке и линейно независимы на другом.

2.7.188. Доказать, что если два частных решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка имеют экстремумы в одной и той же точке, то они линейно зависимы.

2.7.189. Каким условиям должны удовлетворять коэффициенты p и q уравнения $y'' + py' + qy = 0$, чтобы все его частные решения были ограниченными.

2.7.190. Построить две дифференцируемые линейно независимые функции на отрезке $[a, b]$, для которых их определитель Вронского равен нулю тождественно.

2.7.191. На отрезке $[a, b]$ построить три линейно независимые функции, для которых определитель Вронского равен нулю тождественно.

Доказать линейную зависимость функций на их области определения:

2.7.192. $\sin^4 x$, $\cos 4x$, $\cos 2x$, 1. **2.7.193.** $\cos^4 x$, $\cos 4x$, $\cos 2x$, 1.

2.7.194. $\ln x$, $\ln x^2$, $\ln x^3$, $\ln^2 x$, $\ln^3 x$.

2.7.195. $\sin x$, $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

2.7.196. Зная фундаментальную систему решений e^x, $\cos x$, $\sin x$ линейного однородного уравнения, найти его частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 3$, $y'(0) = 4$ и $y''(0) = -1$.

2.7.197. Функции e^x, e^{2x}, e^{3x} образуют фундаментальную систему решений линейного однородного дифференциального уравнения. Найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 6$, $y'(0) = 14$, $y''(0) = 36$.

2.7.198. Проверив, что $y_1 = e^x$ и $y_2 = x$ образуют фундаментальную систему решений уравнения $y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = 0$, найти общее решение уравнения $(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2$.

2.7.199. Проверив, что $y_1 = \cos x$ и $y_2 = x\cos x$ образуют фундаментальную систему решений уравнения $y'' + 2\operatorname{tg} x \cdot y' + (2\operatorname{tg}^2 x + 1)y = 0$, найти общее решение уравнения $\operatorname{ctg} x \cdot y'' + 2y' + (2\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)y = \cos^2 x$.

2.7.200. Найти общее решение уравнения $4y^{IV} + 4y'' + y = 0$.

Найти общие решения уравнений:

2.7.201. $y^V + 8y''' + 16y' = 0$. **2.7.202.** $y^V - 6y^{IV} + 9y''' = 0$.

2.7.203. $y^{IV} - 8y'' + 16y = 0$. **2.7.204.** $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\ln x$.

2.7.205. $y^{VI} - 2y^V + 3y^{IV} - 4y''' + 3y'' - 2y' + y = 0$.

Найти частные решения, удовлетворяющие заданным начальным условиям:

2.7.206. $y''' - y' = -2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 2$.

2.7.207. $y^{IV} - y = 8e^x$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$, $y'''(0) = 0$.

2.7.208. Найти интегральную кривую дифференциального уравнения $y'' - y = 0$, касающуюся в точке $O(0, 0)$ прямой $y = x$.

2.7.209. Найти интегральную кривую уравнения $y'' - 4y' + 3y = 0$, касающуюся в точке $M_0(0, 2)$ прямой $y = x + 2$.