2.2.37. Найти кривую, проходящую через точку $A(3, 0)$, если известно, что угловой коэффициент касательной равен $\dfrac{x+y}{x}$.

2.2.38. Найти семейство кривых, подкасательная в любой точке которых равна среднему арифметическому координат точки касания.

Более сложные задачи

2.2.39. Решить уравнение, сведя его к однородному:

а) $y' = \dfrac{3x-4y-2}{3x-4y-3}$; б) $y' = \dfrac{x+y-2}{3x-y-2}$.

2.2.40. Решить уравнение $x^3(y'-x) = y^2$. (Сделать замену $y = u^m$. Число m подобрать так, чтобы привести уравнение к однородному.)

2.2.41. Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

а) $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{\varphi\left(\frac{y}{x}\right)}{\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)}$; б) $xy' = 4\sqrt{2x^2+y^2} + y$;

в) $3y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 10\dfrac{y}{x} + 10$.

2.2.42. *Задача о прожекторе.* Найти форму зеркала, отражающего все лучи, исходящие из одной точки, параллельно заданному направлению. (Рассмотреть сечение зеркала плоскостью Oxy; источник лучей (света) поместить в начале координат, ось Ox направить параллельно отраженным лучам.)

2.2.43. При каких α и β уравнение $y' = 2x^\alpha + 3y^\beta$ приводится к однородному с помощью замены $y = u^m$? (См. указание к задаче 2.2.40.)

§ 3. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ. УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ

⇛ Дифференциальное уравнение вида

$$y' + p(x)y = g(x), \tag{3.1}$$

где $p(x)$ и $g(x)$ — непрерывные функции (в частности — постоянные), называется *линейным уравнением первого порядка.* ⇚

Уравнение

$$x' + p(y)x = g(y) \tag{3.2}$$

является *линейным относительно x и x'.*

Если $g(x) \equiv 0$, то уравнение (3.1) принимает вид $y' + p(x)y = 0$ и называется *линейным однородным.* Оно является уравнением с разделяющимися переменными. В случае $g(x) \not\equiv 0$ уравнение (3.1) называется *линейным неоднородным уравнением.*

Решение уравнения (3.1) ищется в виде $y = uv$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — неизвестные функции от x (*метод Бернулли*). При этом одну из этих функций (например, $v(x)$) можно выбрать произвольно (из соображений удобства), тогда вторая определится из уравнения (3.1). В обоих случаях они находятся из уравнений с разделяющимися переменными (см. задачу 2.3.1 а)).

Кроме того, уравнение (3.1) можно решить методом вариации произвольной постоянной (*метод Лагранжа*); в этом случае его общее решение ищется в виде $C(x)e^{-\int p(x)\,dx}$ (см. задачу 2.3.1 а)).

⇛ Уравнение вида

$$y' + p(x)y = g(x)y^n, \qquad \text{где} \qquad n \in \mathbb{R}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1,$$

а $p(x)$ и $g(x)$ — непрерывные функции, называется *уравнением Бернулли*. ⇚

Оно приводится к линейному уравнению с помощью подстановки $z = y^{-n+1}$. Уравнение Бернулли можно, не сводя к линейному, проинтегрировать с помощью подстановки $y = uv$ (т. е. методом Бернулли) или применив метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа).

2.3.1. Решить дифференциальные уравнения:

а) $y' + \operatorname{tg} x \cdot y = \dfrac{1}{\cos x}$; **б)** $y' = \dfrac{y}{x + y^2}$;

в) $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$.

а) Данное уравнение имеет вид (3.1) и, стало быть, является линейным. Здесь $p(x) = \operatorname{tg} x$, $g(x) = \dfrac{1}{\cos x}$. Решим уравнение двумя способами.

Метод Бернулли

Полагаем $y = uv$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$ — некоторые функции от x, тогда $y' = u'v + uv'$. Данное уравнение принимает вид:

$$u'v + uv' + \operatorname{tg} x uv = \frac{1}{\cos x},$$

или

$$u'v + u(v' + v \operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos x}. \tag{3.3}$$

Подберем функцию $v = v(x)$ так, чтобы выражение в скобках было равно нулю, т. е. решим первое дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными $v' + v \operatorname{tg} x = 0$. Отсюда $\dfrac{dv}{dx} + v \operatorname{tg} x = 0$, т. е. $\dfrac{dv}{v} + \operatorname{tg} x\,dx = 0$, $\ln|v| - \ln|\cos x| = \ln|C|$, $C \neq 0$, откуда $v = C\cos x$, $C \neq 0$. Поскольку нам достаточно какого-нибудь одного ненулевого решения уравнения, то возьмем $v = \cos x$ (положили $C = 1$). Подставляя $v = \cos x$ в уравнение (3.3), получим второе дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, из которого найдем функцию $u(x)$: $u' \cos x = \dfrac{1}{\cos x}$, т. е. $du = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$, и, следовательно $u = \operatorname{tg} x + C$. Таким образом, $y = uv = (\operatorname{tg} x + C)\cos x$ или $y = C\cos x + \sin x$ — общее решение исходного уравнения.

Метод Лагранжа

Найдем сначала общее решение соответствующего однородного уравнения $y' + \operatorname{tg} x \cdot y = 0$, т. е. $\frac{dy}{dx} = -\operatorname{tg} x \cdot y$. Разделяя переменные, имеем

$$\frac{dy}{y} = -\operatorname{tg} x\, dx, \quad \ln|y| = \ln|\cos x| + \ln|C|, \quad C \neq 0,$$

т. е. $y = C\cos x$. Общее решение заданного уравнения ищем в виде $y = C(x)\cos x$ (букву C заменили неизвестной функцией $C(x)$). Подставляя y и $y' = C'(x)\cos x - C(x)\sin x$ в данное уравнение, получим

$$C'(x)\cos x - C(x)\sin x + \operatorname{tg} x C(x)\cos x = \frac{1}{\cos x},$$

т. е.

$$C'(x)\cos x = \frac{1}{\cos x}$$

(второе и третье слагаемые взаимно уничтожились). Отсюда

$$\frac{dC(x)}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad dC(x) = \frac{dx}{\cos^2 x}, \quad C(x) = \operatorname{tg} x + C.$$

Следовательно, общее решение заданного уравнения есть

$$y = (\operatorname{tg} x + C)\cos x,$$

т. е. $y = C\cos x + \sin x$, как и в первом случае.

б) Данное уравнение не является линейным относительно y и y', но является таковым относительно x и x'. Учитывая, что $y' = \frac{1}{x'}$, приведем уравнение к виду (3.2):

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{y}{x + y^2}, \quad \text{т. е.} \quad x' = \frac{x + y^2}{y}, \quad \text{или} \quad x' - \frac{1}{y}x = y.$$

Решая методом Бернулли, полагаем $x = uv$, где $u = u(y)$, $v = v(y)$ — функции от y. Тогда $x' = u'v + uv'$ и

$$u'v + uv' - \frac{1}{y}uv = y,$$

или

$$u'v + u(v' - \frac{1}{y}v) = y. \tag{3.4}$$

Решаем уравнение с разделяющимися переменными $v' - \frac{1}{y}v = 0$:

$$\frac{dv}{dy} = \frac{v}{y}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{dv}{v} = \frac{dy}{y}, \quad \text{откуда} \quad \ln|v| = \ln|Cy|, \quad C \neq 0.$$

Выбирая одно из возможных решений (самое простое), имеем: $v = y$. Подставляя $v = y$ в уравнение (3.4), получим $u'y = y$, т. е. $y' = 1$, и, значит, $u = y + C$. Следовательно, $x = uv = (y + C)y = y^2 + Cy$, т. е. $x = y^2 + Cy$ — общее решение заданного уравнения; $y = 0$ — особое решение.

в) Уравнение приводится к виду (3.2), т. е. это уравнение Бернулли: $y' - \frac{4}{x}y = x\sqrt{y}$. Снова полагаем $y = uv$. Получаем уравнение

$$u'v + uv' - \frac{4}{x}uv = x\sqrt{uv}$$

или $u'v + u(v' - \frac{4}{x}v) = x\sqrt{uv}$. Решаем первое уравнение $v' - \frac{4}{x}v = 0$, разделяя переменные: $\frac{dv}{v} = \frac{4}{x}dx$, т. е. $\ln|v| = 4\ln|x| + C$. Выбирая простейшее решение (при $C = 0$), находим $v = x^4$. Решаем второе уравнение с разделяющимися переменными: $u'x^4 = x\sqrt{u}\cdot x^2$, т. е. $\frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{dx}{x}$, откуда $2\sqrt{u} = \ln|x| + \ln|C|$, $C \neq 0$. Таким образом, $u = \frac{1}{4}\ln^2|xC|$, $C \neq 0$, и, следовательно, $y = uv = \frac{1}{4}x^4\ln^2|xC|$, где $C \neq 0$, — общее решение заданного уравнения, $y = 0$ — особое решение. ●

Решить уравнения:

2.3.2. $y' - 2xy = e^{x^2}$.

2.3.3. $xy' + y - 3x^2 = 0$.

2.3.4. $y^2\,dx + (x+2)\,dy = 0$.

2.3.5. $(x+1)y' - 2y = y^2(x+1)^5$.

2.3.6. Найти кривую, проходящую через точку $P(1,0)$ и такую, что отрезок, отсекаемый касательной на оси ординат, равен абсциссе точки касания.

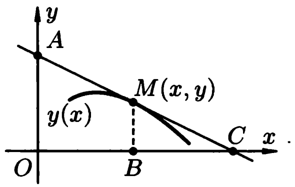

Рис. 7

◐ Пусть AC — касательная к искомой кривой в точке $M(x,y)$ (рис. 7). Согласно условию $OB = x = OA$. Найдем ординату точки A, положив $X = 0$ в уравнении касательной $Y - y = y'(X - x)$, где $Y = OA$. Имеем: $Y - y = -y'x$, т. е. $Y = y - y'x$. Таким образом, получили линейное уравнение $x = y - y'x$, или $y' - \frac{1}{x}y = -1$. Положив $y = uv$, решим его методом Бернулли: $u'v + uv' - \frac{uv}{x} = -1$, т. е. $uv' + v\left(u' - \frac{u}{x}\right) = -1$. Находим u: $\frac{du}{dx} - \frac{u}{x} = 0$, $\frac{du}{u} = \frac{dx}{x}$, $u = x$. Находим v, подставляя u: $xv' = -1$, или $v' = -\frac{1}{x}$, откуда $v = -\ln|x| + \ln|C|$, т. е. $v = \ln\left|\frac{C}{x}\right|$, где $C \neq 0$. Итак, $y = x\ln\left|\frac{C}{x}\right|$, где $C \neq 0$ — уравнение семейства интегральных кривых. Выделим среди них одну кривую, проходящую через точку

$P(1,0)$: $0 = 1 \cdot \ln|C|$, а значит, $C = \pm 1$. Следовательно, $y = x \ln \frac{1}{|x|}$, т. е. $y = -x \ln|x|$ — уравнение искомой кривой. ●

2.3.7. Найти кривую, проходящую через точку $O(0,0)$, зная, что угловой коэффициент в любой ее точке равен сумме координат этой точки.

Дополнительные задачи

Решить дифференциальные уравнения:

2.3.8. $y' + 2y = 3e^x$.

2.3.9. $(1+x^2)y' + 2xy = 3x^2$.

2.3.10. $2(x+y^4)y' - y = 0$.

2.3.11. $y^2\,dx + (xy-1)\,dy = 0$.

2.3.12. $xy' + y = \frac{y^2}{2}\ln x$.

2.3.13. $y' + 2xy = 2xy^3$.

2.3.14. $y' + y\cos x = \sin 2x$.

2.3.15. $x\frac{dy}{dx} + y = 4x^3$.

2.3.16. $y'e^{x^2} - (xe^{x^2} - y^2)y = 0$.

2.3.17. $x^3y^2y' + x^2y^3 = 1$.

2.3.18. $y'x^3\sin y - xy' + 2y = 0$.

2.3.19. $y' - y = \left(x + \frac{1}{x}\right)e^x$.

2.3.20. $y' + \frac{x}{1-x^2}\,y = 2$.

2.3.21. $y' - \frac{y}{\sin x} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

2.3.22. $xy' - y - x^3 = 0$, $y(2) = 4$.

2.3.23. $y'\sin x - y\cos x = 1$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

2.3.24. $2y^2\,dx + (x + e^{\frac{1}{y}})\,dy = 0$, $y(e) = 1$.

2.3.25. $y' - \frac{1}{x}\,y = -y^2$, $y(1) = -1$.

2.3.26. $x\cos^2 x\, y' + 2y\cos^2 x = 2x\sqrt{y}$.

2.3.27. $y\,dx + (4\ln y - 2x - y)\,dy = 0$.

2.3.28. $(y'+y)(x^2+1) = e^{-x}$, $y(0) = 1$.

2.3.29. $s' - s\sin t = 2\sin 2t$, $s(0) = 1$.

2.3.30. $\varphi r' + r - e^{\varphi} = 0$, $r(\alpha) = 2\alpha$.

2.3.31. $dx + (xy - y^3)\,dy = 0$, $y(-1) = 0$.

2.3.32. $y' + \frac{2y}{x} = 3x^2\sqrt[4]{y^3}$, $y(1) = 1$.

2.3.33. Пусть y_1 и y_2 — два различных решения уравнения $y' + p(x)y = g(x)$. При каком соотношении между постоянными C_1 и C_2 функция $y = C_1y_1 + C_2y_2$ будет решением данного уравнения?

2.3.34. Материальная точка массой m погружается с нулевой начальной скоростью в жидкость. На нее действует сила тяжести и сила сопротивления жидкости, пропорциональная скорости погружения (коэффициент пропорциональности k). Найти зависимость скорости движения точки от времени.

2.3.35. Найти кривую, проходящую через точку $A(1,2)$, касательная к которой в произвольной ее точке отсекает на оси ординат отрезок, равный квадрату ординаты точки касания.

2.3.36. Сила тока I в электрической цепи с сопротивлением R, коэффициентом индуктивности L и электродвижущей силой E удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$L\frac{dI}{dt}+RI=E.$$

Найти зависимость силы тока $I=I(t)$ от времени, если:

а) E изменяется по закону $E=kt$ и $I(0)=0$ (L, R, k — постоянные), k — коэффициент пропорциональности;

б) E изменяется по закону $E=A\sin\omega t$ и $I(0)=0$ (L, R, A, ω — постоянные).

Контрольные вопросы и более сложные задачи

2.3.37. Найти общее решение уравнения $y'+y\varphi'(x)-\varphi(x)\varphi'(x)=0$, где $\varphi(x)$ — заданная функция.

2.3.38. Решить уравнения:

а) $xy'-xe^y+2=0$; б) $y(x)=\int\limits_0^x y(t)\,dt+x+1$.

Решить дифференциальные уравнения:

2.3.39. $y'-2xy=1-2x^2$, $y(0)=2$.

2.3.40. $yx'+2x=\dfrac{2y\sqrt{x}}{\cos^2 y}$, $y(0)=\pi$.

2.3.41. $y'\cos y+\sin y=x$.

2.3.42. $dx+(2x+\sin 2y-2\cos^2 y)\,dy=0$, $y(-1)=0$.

2.3.43. $(64y^3-x)y'-2y=0$.

2.3.44. $y'+xy=\dfrac{x-1}{2}\,e^x y^2$, $y(0)=2$.

2.3.45. Найти кривые, у которых площадь треугольника, образованного осью абсцисс, касательной и радиусом-вектором точки касания, постоянна и равна 4.

2.3.46. Кривая $y=f(x)$ проходит через точку $O(0,0)$. Найти ее уравнение, зная, что середина отрезка ее нормали от любой точки кривой до оси абсцисс лежит на параболе $y^2=x$.

Указание. Середина C отрезка нормали имеет координаты

$$\left(x+\frac{1}{2}\,yy',\,\frac{y}{2}\right).$$

2.3.47. Найти такие функции $p(x)$ и $g(x)$, чтобы решениями уравнения $y'+p(x)y=g(x)$ являлись функции $y=1$ и $y=x^3+1$.

2.3.48. Можно ли решать уравнение $y'=y$ с помощью подстановки $y=uv$?

2.3.49. Может ли решение уравнения $y'=y$ ($y\neq 0$) иметь точки минимума?

2.3.50. Для какой кривой касательная в каждой ее точке перпендикулярна радиус-вектору точки касания?