

- р)  $\sqrt{1-y^2} dx + \sqrt{1-x^2} dy = 0$ ,  $y(0) = 1$ ;  
 д)  $y' = 3x - 2y + 1$  (положить  $3x - y + 1 = t$ );  
 е)  $y' = \cos(y - x)$ .

## § 2. ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

⇒ Функция  $f(x, y)$  называется однородной функцией степени  $n$ , где  $n$ -целое, если при любом  $\alpha$  имеет место тождество  $f(\alpha x, \alpha y) = \alpha^n f(x, y)$ . ⇔

В частности, функция  $f(x, y)$  — однородная нулевой степени, если

$$f(\alpha x, \alpha y) = f(x, y).$$

⇒ Дифференциальное уравнение вида

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0 \quad (2.1)$$

называется однородным, если  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  — однородные функции одинаковой степени. ⇔

Уравнение (2.1) может быть приведено к виду

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \quad (2.2)$$

Однородное уравнение преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными при помощи замены переменной

$$\frac{y}{x} = u \quad \text{т. е.} \quad y = ux,$$

где  $u = u(x)$  — новая неизвестная функция (можно также применять подстановку  $\frac{x}{y} = u$ ).

**Замечание.** Уравнение вида  $y' = \frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}$  приводится к однородному с помощью замен  $x = u + \alpha$ ,  $y = v + \beta$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  — числа, которые подбирают соответствующим образом (см. задачу 2.2.5). Этот же прием используется при решении уравнений вида  $y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right)$ .

**2.2.1.** Проинтегрировать следующие дифференциальные уравнения:

- а)  $(y^2 + xy) dx - x^2 dy = 0$ ;      б)  $y' = \frac{xy^2 - yx^2}{x^3}$ ,  $y(-1) = 1$ ;  
 в)  $xy' - y + xe^{\frac{y}{x}} = 0$ .

○ а) Заданное уравнение имеет вид (2.1). Коэффициенты при  $dx$  и  $dy$ , т. е.  $P(x, y) = y^2 + xy$  и  $Q(x, y) = -x^2$ , являются однородными функциями одной и той же степени (второй). Действительно,

$$P(\alpha x, \alpha y) = (\alpha y)^2 + (\alpha x \cdot \alpha y) = \alpha^2(y^2 + xy) = \alpha^2 P(x, y),$$

$Q(ax, ay) = -(\alpha x)^2 = \alpha^2(-x^2) = \alpha^2 Q(x, y)$ ,  $n = 2$ . Следовательно, данное уравнение однородное. Положим  $y = ux$ . Тогда  $dy = x du + u dx$ , и данное уравнение принимает вид

$$(u^2 x^2 + x^2 u) dx - x^2(x du + u dx) = 0.$$

После упрощений получим:

$$u^2 dx - x du = 0 \quad \text{или} \quad \frac{dx}{x} - \frac{du}{u^2} = 0.$$

Интегрируя последнее уравнение, получим  $\ln|x| + \frac{1}{u} = C$ . Вспоминая, что  $u = \frac{y}{x}$ , находим общий интеграл исходного уравнения:  $\ln|x| + \frac{x}{y} = C$ .

Отметим, что заданное уравнение можно было сначала привести к виду (2.2):

$$y^2 + xy - x^2 \frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + xy}{x^2}, \quad \text{или} \quad y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x}.$$

Полагая  $y = ux$ , находим далее  $y' = u'x + u$  и т. д. (см. б)).

б) Преобразуем уравнение к виду (2.2):  $y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x}$ . Полагая  $y = ux$ , находим:  $y' = u'x + u$ . Подставим значения  $y$  и  $y'$  в данное уравнение:  $u'x + u = u^2 - u$ . Преобразовывая, получим уравнение с разделяющимися переменными:  $\frac{du}{dx} \cdot x = u^2 - 2u$ . Разделяя переменные и интегрируя, имеем:  $\int \frac{du}{u^2 - 2u} = \int \frac{dx}{x}$ , откуда  $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{u-2}{u} \right| = \ln|x| + \frac{1}{2} \ln|C_1|$ , т. е.  $\left| \frac{u-2}{u} \right| = |C_1|x^2$ . Подставляя  $u = \frac{y}{x}$ , получаем  $\left| \frac{y-2x}{y} \right| = |C_1|x^2$ , т. е.  $\frac{y-2x}{y} = \pm C_1 x^2$ , или  $\frac{y-2x}{y} = C x^2$ , где  $C = \pm C_1$ . Теперь найдем значение постоянной  $C$ , используя начальное условие:  $\frac{1+2}{1} = C \cdot 1$ , т. е.  $C = 3$ . Отсюда:  $\frac{y-2x}{y} = 3x^2$ , т. е.  $y(3x^2 - 1) = -2x$ , откуда окончательно:  $y = \frac{2x}{1 - 3x^2}$  — частное решение заданного уравнения.

в) Преобразуем уравнение к виду (2.2):  $y' - \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}} = 0$ . Сделав подстановку  $\frac{y}{x} = u$ , т. е.  $y = ux$ , получим  $u'x + u - u + e^u = 0$ , или  $\frac{du}{e^u} + \frac{dx}{x} = 0$ . Интегрируя, имеем:  $\int e^{-u} du = - \int \frac{dx}{x}$ , т. е.  $-e^u = -\ln|x| - \ln|C|$ ,  $C \neq 0$ . Отсюда  $\ln|Cx| = e^{-u}$ , т. е.  $-u = \ln \ln|Cx|$ ,  $C \neq 0$ . Учитывая, что  $u = \frac{y}{x}$ , получаем общее решение заданного уравнения  $y = -x \ln \ln|Cx|$ ,  $C \neq 0$ . ●

Решить уравнения:

$$2.2.2. \quad y dx + (x+y) dy = 0. \quad 2.2.3. \quad y' = \frac{xy+y^2}{2x^2+xy}.$$

$$2.2.4. \quad xy' = y + x \sin \frac{y}{x}, \quad y(1) = \frac{\pi}{2}.$$

**2.2.5.** Привести дифференциальное уравнение

$$(y+2)dx - (2x+y+6)dy = 0$$

к однородному.

○ Положив  $x = u + \alpha$ ,  $y = v + \beta$ , получаем

$$(v + \beta + 2)du - (2u + 2\alpha + v + \beta + 6)dv = 0,$$

т. е.  $(v + (\beta + 2))du - (2u + v + (2\alpha + \beta + 6))dv = 0$ . Подберем  $\alpha$  и  $\beta$  так, чтобы

$$\begin{cases} \beta + 2 = 0, \\ 2\alpha + \beta + 6 = 0. \end{cases}$$

Решая систему, находим,  $\alpha = -2$ ,  $\beta = -2$ . Тогда исходное уравнение принимает вид (2.1):  $v dv - (2u + v) du = 0$ , т. е. является однородным, что и требовалось. ●

**2.2.6.** Решить уравнение, сведя его к однородному:

$$(2x - 2)dy = (x + 2y - 3)dx.$$

**2.2.7.** Найти уравнение кривой, проходящей через точку  $A(1, 1)$ , у которой подкасательная (см. задачу 2.1.76) равна сумме координат точки касания.

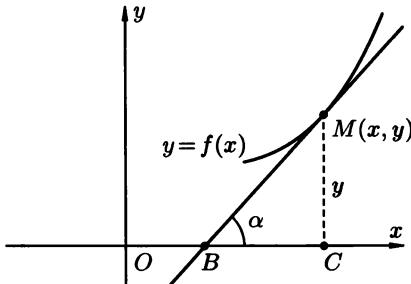


Рис. 6

○ На рис. 6 отрезок  $BC$  является подкасательной. Касательная к исходной кривой  $y = f(x)$  проведена в точке  $M(x, y)$ . Так как по условию  $BC = x + y$ , то из прямоугольного треугольника  $MCB$  находим:  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x+y}$ , т. е.  $y' = \frac{y}{x+y}$ . Решим полученное однородное дифференциальное уравнение. Полагая  $y = ux$ , откуда  $y' = u'x + u$ , имеем  $u'x + u = \frac{ux}{x+ux}$ , т. е.  $u'x = \frac{u}{1+u} - u$ . Отсюда  $\frac{du}{dx}x = \frac{-u^2}{1+u}$ , или  $\frac{1+u}{u^2} = -\frac{dx}{x}$ . Интегрируя полученное уравнение, имеем

$$\ln|u| - \frac{1}{u} = -\ln|x| - \ln|C|,$$

$C \neq 0$ , т. е.  $\frac{1}{u} = \ln|Cxu|$  или  $\frac{x}{y} = \ln|Cy|$ ,  $C \neq 0$ . Подставляя  $x = 1$ ,  $y = 1$  (по условию кривая проходит через точку  $A(1, 1)$ ), находим конкретное

значение  $C: 1 = \ln |C|$ ,  $C = \pm e$ . Таким образом, искомой кривой является линия, определяемая уравнением  $x = y \ln |ey|$ .

- 
- 2.2.8.** Найти семейство линий, касательные к которым отсекают от оси абсцисс отрезки, равные ординате точки касания.
- 2.2.9.** Найти кривую, проходящую через точку  $A(1, 1)$ , у которой расстояние любой касательной от начала координат равно абсциссе точки касания.

## Дополнительные задачи

Решить дифференциальные уравнения:

- 2.2.10.**  $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$ .
- 2.2.11.**  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$ .
- 2.2.12.**  $y = xy' - xe^{\frac{y}{x}}$ .
- 2.2.13.**  $xy' - y(\ln y - \ln x) = 0$ .
- 2.2.14.**  $y' = \frac{y + 2\sqrt{xy}}{x}$ .
- 2.2.15.**  $ss' - 2s + t = 0$ .
- 2.2.16.**  $x^2 + y^2 = 2xyy'$ .
- 2.2.17.**  $\sqrt{y}(2\sqrt{x} - \sqrt{y}) dx + x dy = 0$ .
- 2.2.18.**  $y' = \frac{x+y}{x-y}$ .
- 2.2.19.**  $y' \cos \frac{y}{x} - \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x} + 1 = 0$ .
- 2.2.20.**  $xy' + x \operatorname{tg} \frac{y}{x} = y$ .
- 2.2.21.**  $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x}(1 + \ln y - \ln x) = 0$ .
- 2.2.22.**  $(3x^2 - y^2)y' = 2xy$ .
- 2.2.23.**  $y' - 1 = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$ ,  $y(1) = 0$ .
- 2.2.24.**  $(2x^3y - y^4) dx + (2xy^3 - x^4) dy = 0$ .
- 2.2.25.**  $x dy = (x + y) dx$ ,  $y(1) = 0$ .
- 2.2.26.**  $y^2 + x^2y' = xyy'$ ,  $y(1) = 1$ .
- 2.2.27.**  $\left(y' - \frac{y}{x}\right) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = 1$ ,  $\dot{y}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ .
- 2.2.28.**  $xy' - y = (x + y) \ln \frac{x + y}{x}$ .
- 2.2.29.**  $y(x^2 + y^2) dx - x^3 dy = 0$ .
- 2.2.30.**  $(x^2 + y^2 + xy) dx - x^2 dy = 0$ .
- 2.2.31.**  $x^2y' + xy - x^2 - y^2 = 0$ ,  $y(1) = 0$ .
- 2.2.32.**  $x^2 - 3y^2 + 2xyy' = 0$ ,  $y(-2) = 2$ .
- 2.2.33.**  $y - xy' = 2(x + yy')$ ,  $y(1) = 0$ .
- 2.2.34.**  $y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}$ ,  $y(1) = e$ .
- 2.2.35.** Найти кривую, проходящую через точку  $A(1, 0)$ , если известно, что треугольник, образованный осью ординат, касательной к кривой в произвольной ее точке и радиус-вектором точки касания, равнобедренный; основанием его является отрезок касательной от точки касания до оси ординат.
- 2.2.36.** Найти кривую, проходящую через точку  $A(1, 2)$ , для которой отрезок на оси ординат, отсекаемый любой касательной к кривой, равен абсциссе точки касания.