Все три равенства верные, поэтому делаем вывод о правильности полученного ранее решения $x=0$, $y=-1$, $z=2$.

В ЗАДАЧАХ 21—40 даны координаты вершин треугольника ABC. Найти: 1) длину стороны AB; 2) уравнения сторон AB и BC и их угловые коэффициенты; 3) внутренний угол B в радианах с точностью до 0,01; 4) уравнение медианы AE; 5) уравнение и длину высоты CD; 6) уравнение прямой, проходящей через точку E параллельно стороне AB и точку M ее пресечения с высотой CD.

21. $A(1;\ -1)$, $B(4;\ 3)$, $C(5;\ 1)$.
22. $A(0;\ -1)$, $B(3;\ 3)$, $C(4;\ 1)$.
23. $A(1;\ -2)$, $B(4;\ 2)$, $C(5;\ 0)$.
24. $A(2;\ -2)$, $B(5;\ 2)$, $C(6;\ 0)$.
25. $A(0;\ 0)$, $B(3;\ 4)$, $C(4;\ 2)$.
26. $A(0;\ 1)$, $B(3;\ 5)$, $C(4;\ 3)$.
27. $A(3;\ -2)$, $B(6;\ 2)$, $C(7;\ 0)$.
28. $A(3;\ -3)$, $B(6;\ 1)$, $C(7;\ -1)$.
29. $A(-1;\ 1)$, $B(2;\ 5)$, $C(3;\ 3)$.
30. $A(4;\ 0)$, $B(7;\ 4)$, $C(8;\ 2)$.
31. $A(2;\ 2)$, $B(5;\ 6)$, $C(6;\ 4)$.
32. $A(4;\ -2)$, $B(7;\ 2)$, $C(8;\ 0)$.
33. $A(0;\ 2)$, $B(3;\ 6)$, $C(4;\ 4)$.
34. $A(4;\ 1)$, $B(7;\ 5)$, $C(8;\ 3)$.
35. $A(3;\ 2)$, $B(6;\ 6)$, $C(7;\ 4)$.
36. $A(-2;\ 1)$, $B(1;\ 5)$, $C(2;\ 3)$.
37. $A(4;\ -3)$, $B(7;\ 1)$, $C(8;\ -1)$.
38. $A(-2;\ 2)$, $B(1;\ 6)$, $C(2;\ 4)$.
39. $A(5;\ 0)$, $B(8;\ 4)$, $C(9;\ 2)$.
40. $A(2;\ 3)$, $B(5;\ 7)$, $C(6;\ 5)$.

Решение типового примера. Пусть $A(-1;\ 2)$, $B(5;\ -1)$, $C(-4;\ -5)$.

1. Расстояние d между точками $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$ определяется по формуле

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}, \qquad (1)$$

воспользовавшись которой находим длину стороны AB:

$$AB=\sqrt{(5+1)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}.$$

2. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки плоскости $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$ имеет вид

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}. \qquad (2)$$

Подставляя в (2) координаты точек A и B, получаем уравнение стороны AB:

$$\frac{y-2}{-1-2}=\frac{x+1}{5+1};\ \frac{y-2}{-3}=\frac{x+1}{6};\ \frac{y-2}{-1}=\frac{x+1}{2};$$

$$2y-4=-x-1;\ x+2y-3=0\ (AB).$$

Угловой коэффициент k_{AB} прямой AB найдем, преобразовав полученное уравнение к виду уравнения прямой с угловым коэффициентом $y=kx+b$.

У нас $2y=-x+3$, то есть $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$, откуда $k_{AB}=-\frac{1}{2}$.

Аналогично получим уравнение прямой BC и найдем ее угловой коэффициент:

$$\frac{y+1}{-5+1}=\frac{x-5}{-4-5};\ \frac{y+1}{-4}=\frac{x-5}{-9};\ -9y-9=-4x+20;$$

$$4x-9y-29=0\ (BC).$$

Далее

$$-9y=-4x+29;\ y=\frac{4}{9}x-\frac{29}{9},\ \text{т. е. } k_{BC}=\frac{4}{9}.$$

3. Для нахождения внутреннего угла нашего треугольника воспользуемся формулой

$$\operatorname{tg} B=\frac{k_{BC}-k_{AB}}{1+k_{AB}k_{BC}}. \qquad (3)$$

Отметим, что порядок вычисления разности угловых коэффициентов, стоящей в числителе этой дроби, зависит от взаимного расположения прямых AB и BC. Подумайте, как бы Вы стали искать внутренние углы A и C треугольника ABC?

Подставив ранее вычисленные значения k_{AB} и k_{BC} в (3), находим:

4

$$\operatorname{tg} B=\frac{\frac{4}{9}+\frac{1}{2}}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{4}{9}}=\frac{17}{14}\approx 1{,}2143.$$

Теперь, воспользовавшись таблицами В. М. Брадиса или инженерным микрокалькулятором, получаем $B\approx 0{,}88$ рад.

4. Для составления уравнения медианы AE найдем сначала координаты точки E, которая лежит на середине отрезка BC:

$$x_E=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{5+(-4)}{2}=\frac{1}{2};$$

$$y_E=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{(-1)+(-5)}{2}=-3.$$

Теперь, подставив в (2) координаты точек A и E, получаем уравнение медианы:

$$\frac{y-2}{-3-2}=\frac{x+1}{\frac{1}{2}+1};\quad \frac{y-2}{-5}=\frac{x+1}{\frac{3}{2}};\quad \frac{3}{2}(y-2)=-5(x+1);$$

$$3(y-2)=-10(x+1);\ 10x+3y+4=0 \qquad (AE).$$

5. Для составления уравнения высоты CD воспользуемся уравнением прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ с заданным угловым коэффициентом k, которое имеет вид

$$y-y_0=k(x-x_0), \tag{4}$$

и условием перпендикулярности прямых AB и CD, которое выражается соотношением $k_{AB}\cdot k_{CD}=-1$, откуда $k_{CD}=-\frac{1}{k_{AB}}=$ $=2$. Подставив в (4) вместо k значение $k_{CD}=2$, а вместо x_0, y_0 координаты точки C, получим уравнение высоты CD:

$$y+5=2(x+4);\ y+5=2x+8;\ 2x-y+3=0 \qquad (CD).$$

Для вычисления длины высоты CD воспользуемся формулой отыскания расстояния d от заданной точки $M_0(x_0, y_0)$ до заданной прямой с уравнением $Ax+By+C=0$, которая имеет вид

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{5}$$

Подставив в (5) вместо x_0, y_0 координаты точки C, а вместо A, B и C коэффициенты уравнения прямой AB, получаем

$$d = CD = \frac{|-4+2(-5)-3|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{17}{\sqrt{5}}.$$

6. Так как искомая прямая EF параллельна прямой AB, то $k_{EF} = k_{AB} = -\frac{1}{2}$. Подставив в уравнение (4) вместо x_0, y_0 координаты точки E, а вместо k значение k_{EF}, получаем уравнение прямой EF:

$$y+3 = -\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right);\ 2y+6 = -x+\frac{1}{2};$$

$$4y+12 = -2x+1;\ 2x+4y+11=0 \qquad (EF).$$

Для отыскания координат точки M решаем совместно уравнения прямых EF и CD:

$$\begin{cases} 2x+4y+11=0; \\ 2x-\ y+\ 3=0; \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{23}{10}; \\ y = -\frac{8}{5}; \end{cases}$$

Таким образом, $M\left(-\frac{23}{10}; -\frac{8}{5}\right)$.

Треугольник ABC, высота CD, медиана AE, прямая EF и точка M построены в системе координат xOy на рис. 1.

В ЗАДАЧАХ 41—60 даны координаты вершин пирамиды $ABCD$. Требуется:

1) записать векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ в системе орт $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ и найти модули этих векторов;

2) найти угол между векторами $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$;

3) найти проекцию вектора $\overrightarrow{AD}$ на вектор $\overrightarrow{AB}$;
4) найти площадь грани ABC;
5) найти объем пирамиды $ABCD$;
6) составить уравнение ребра AC;
7) составить уравнение грани ABC.

41. $A(1; 2; 1)$, $B(-1; 5; 1)$, $C(-1; 2; 7)$, $D(1; 5; 9)$.

42. $A(2; 3; 2)$, $B(0; 6; 2)$, $C(0; 3; 8)$, $D(2; 6; 10)$.

43. $A(0; 3; 2)$, $B(-2; 6; 2)$, $C(-2; 3; 8)$, $D(0; 6; 10)$.