Глава 1. РЯДЫ

❑

§ 1. ПОНЯТИЕ РЯДА. РЯДЫ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Ряд. Сходимость ряда. Сумма ряда

⇛ Пусть задана бесконечная последовательность чисел (действительных или комплексных)

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

Числовым рядом называется выражение вида

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

Сокращенно ряд обозначают следующим образом: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. При этом числа $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ называются *членами* ряда, а число a_n — *общим членом* ряда. Суммы вида

$$S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2,\ \ldots,\ S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n, \ldots$$

называются *частичными суммами* ряда. Числовой ряд называется *сходящимся*, если существует конечный предел последовательности $\{S_n\}$ его частичных сумм:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

В этом случае указанный предел называется *суммой ряда.*

Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует или равен бесконечности, то числовой ряд называется *расходящимся* и суммы не имеет. ⇚

Простейшие свойства рядов. Необходимый признак сходимости

> **Теорема 1.1.** Если у сходящегося ряда отбросить конечное число его членов, то полученный ряд также будет сходиться. Верно и обратное: если сходится ряд, полученный отбрасыванием конечного числа членов у данного ряда, то и данный ряд также сходится.

Таким образом, сходимость ряда не меняется при отбрасывании любого конечного числа его членов.

Теорема 1.2. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, и его сумма равна S. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha a_1 + \alpha a_2 + \ldots + \alpha a_n + \ldots$, где α — произвольное число, также сходится, причем его сумма равна αS.

Теорема 1.3. Пусть ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, и их суммы, соответственно, равны S_1 и S_2. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots$ также сходится, причем его сумма равна $S_1 + S_2$.

Необходимый признак сходимости

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то общий член ряда a_n стремится к нулю при $n \to \infty$, т. е.:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Таким образом, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Ряд $a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots$, составленный из членов бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем q и первым членом $a \neq 0$, называется *геометрическим рядом.* Если $|q| \geqslant 1$, то геометрический ряд расходится, если $|q| < 1$ — сходится (при этом его сумма S находится по формуле $S = \dfrac{a}{1-q}$).

Ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$, или, что то же самое, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, называется *гармоническим.* Гармонический ряд расходится. Ряд $1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots$, где $p > 0$, называется *рядом Дирихле.* Этот ряд сходится при $p > 1$ и расходится при $0 < p \leqslant 1$. Частным случаем ряда Дирихле (при $p = 1$) является гармонический ряд.

Признаки сходимости рядов с положительными членами

1-й признак сравнения

Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ — ряды с положительными членами, причем $a_n \leqslant b_n$ для всех номеров n, начиная с некоторого. Тогда:

1) если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$;

2) если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

2-й признак сравнения

Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ — ряды с положительными членами, причем существует конечный и отличный от нуля предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

Тогда ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

При использовании 1-го или 2-го признака сравнения, как правило, сравнивают исходный ряд с соответствующим рядом Дирихле. При этом часто используют эквивалентность следующих бесконечно малых последовательностей (при $n \to \infty$):

$$\sin\frac{1}{n} \sim \operatorname{tg}\frac{1}{n} \sim \arcsin\frac{1}{n} \sim \operatorname{arctg}\frac{1}{n} \sim \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}.$$

Признак Даламбера

Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — ряд с положительными членами, и существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l.$$

Тогда, если $l < 1$, то данный ряд сходится; если же $l > 1$, то — расходится.

Если $l = 1$, то ряд может сходиться или расходиться; в этом случае требуется исследовать ряд с помощью других методов.

Признак Коши

Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — ряд с положительными членами, и существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l.$$

Тогда, если $l < 1$, то данный ряд сходится; если же $l > 1$, то — расходится.

Если $l = 1$, то ряд может сходиться или расходиться; в этом случае требуется исследовать ряд с помощью других методов.

Интегральный признак сходимости

Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — ряд с положительными членами, для которого существует положительная, непрерывная и монотонно убывающая на промежутке $[1, +\infty)$ функция $f(x)$ такая, что $f(n) = a_n$, $n = 1, 2, \ldots$

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.

1.1.1. Для каждого ряда написать формулу частичной суммы S_n; найти $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ или доказать, что этот предел не существует; сделать вывод о сходимости или расходимости ряда:

а) $1+2+3+\ldots+n+\ldots$;

б) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$.

○ а) Так как члены ряда $1+2+3+\ldots+n+\ldots$ представляют собой арифметическую прогрессию с первым членом, равным 1, и разностью, равной 1, то по формуле для суммы первых n членов арифметической прогрессии получим:

$$S_n = \frac{1+n}{2}\cdot n.$$

Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+n}{2}\cdot n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}(n+n^2) = +\infty$. Следовательно, ряд расходится. Таким образом $S_n = \frac{1+n}{2}\cdot n$; $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$; ряд расходится.

б) Так как $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, то

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)} = \\ &= \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = \\ &= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} = \\ &= 1+0+0+\ldots+0-\frac{1}{n+1} = 1-\frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1$. Значит, ряд сходится, и его сумма равна 1.

Окончательно: $S_n = 1-\frac{1}{n+1}$; $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$; ряд сходится. ●

Для каждого ряда в задачах 1.1.2–1.1.8:

1) написать формулу частичной суммы S_n;

2) найти $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ или доказать, что этот предел не существует;

3) сделать вывод о сходимости или расходимости ряда.

1.1.2. $1-1+1-1+\ldots+(-1)^{n-1}+\ldots$

1.1.3. $1+3+5+\ldots+(2n-1)+\ldots$

1.1.4. $2-4+6-8+\ldots+(-1)^{n+1}\cdot 2n+\ldots$

1.1.5. $1+2+4+\ldots+2^{n-1}+\ldots$

1.1.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}$

1.1.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

1.1.8. $\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\ldots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ldots$.

1.1.9. Найти предел при $n \to \infty$ общего члена ряда a_n. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq$ $\neq 0$, то, применяя необходимый признак сходимости, установить, что ряд расходится.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{2n+1}$. **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+2}{\ln(n+1)}$.

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{n^3+2}$.

○ **а)** Найдем предел общего члена ряда:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} =$$

$$\Big[\text{Разделим числитель и знаменатель дроби на } n\Big]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{2} \neq 0,$$

значит, ряд расходится.

Итак, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$; ряд расходится.

б) Так как при $n \to \infty$ имеем $(n+2) \to \infty$ и $\ln(n+1) \to \infty$, то для нахождения предела $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+2}{\ln(x+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x+2)'}{(\ln(x+1))'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{(x+1)}} = \lim_{x\to\infty} (x+1) = \infty.$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+2}{\ln(n+1)} = \infty \neq 0$, и ряд расходится.

в) Найдем предел общего члена ряда:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3+2} =$$

$$\Big[\text{Разделим числитель и знаменатель на } n^3.\Big]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 : n^3}{(n^3+2) : n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n^3}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n^3}\right)} = \frac{0}{1} = 0.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то данный ряд может сходиться, а может и расходиться.

На самом деле, данный ряд, как будет показано ниже, расходится, однако, используя только необходимый признак сходимости, доказать этого нельзя.

Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$; ряд может сходиться или расходиться. ●

В задачах 1.1.10–1.1.17 найти предел при $n \to \infty$ общего члена ряда a_n. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то, применяя необходимый признак сходимости, установить, что ряд расходится.

1.1.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2n-3}$.

1.1.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{(n+2)^3}$.

1.1.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n+1}$.

1.1.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{n^2+1}{n+3}$.

1.1.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$.

1.1.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\cdot n}{\ln(n+1)}$.

1.1.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2+(-1)^n)^n}$.

1.1.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{3}{n}\right)^n$.

1.1.18. Применяя 1-й признак сравнения, исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2+\sin n}{n}$.

○ Так как $\sin n \geqslant -1$, то $2+\sin n \geqslant 1$, откуда $\frac{2+\sin n}{n} \geqslant \frac{1}{n}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, значит, расходится и больший ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2+\sin n}{n}$. ●

Исследовать ряд на сходимость, применяя 1-й признак сравнения. Указать общий член ряда, с которым сравнивается данный ряд.

1.1.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n+1}{n^2}$.

1.1.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n+1}{2^n}$.

1.1.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$.

1.1.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}$.

1.1.23. Исследовать ряд на сходимость, применяя 2-й признак сравнения. Указать общий член ряда, с которым сравнивается данный ряд.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2+n+1}$.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}+2}{\sqrt{n^6+2n-2}}$.

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \ln \frac{n+1}{n}$.

○ **а)** Числитель и знаменатель дроби $\frac{n+2}{n^2+n+1}$ неограниченно растут при $n \to \infty$. Скорость роста числителя $(n+2)$ определяется слагаемым n, т. е. числитель «растет как n» при $n \to \infty$. Более строго: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2}{n} = 1$, что также можно записать в следующем виде: $n+2 \sim n$, $n \to \infty$ (т. е. последовательности $n+2$ и n эквивалентны при $n \to \infty$). Аналогично, скорость роста знаменателя (n^2+n+1) определяется слагаемым n^2, т. е. знаменатель «растет как n^2» при $n \to \infty$. Более строго: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n+1}{n^2} = 1$, что также можно записать в виде: $n^2+n+1 \sim n^2$, $n \to \infty$ (последовательности n^2+n+1 и n^2 эквивалентны при $n\to\infty$).

Таким образом, $\dfrac{(n+2)\sim n}{(n^2+n+1)\sim n^2}\sim\dfrac{n}{n^2}=\dfrac{1}{n}$. В других обозначениях:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n^2+n+1}:\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n}{n^2+n+1}=$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+2n):n^2}{(n^2+n+1):n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=1.$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ расходится, то расходится и исходный ряд.

б) Учитывая, что и числитель и знаменатель дроби $\dfrac{n\sqrt{n}+2}{\sqrt{n^6+2n-2}}$ неограниченно растут при $n\to\infty$, запишем дробь, составленную из эквивалентных им выражений:

$$\frac{n\sqrt{n}+2}{\sqrt{n^6+2n-2}}\sim\frac{n\sqrt{n}}{\sqrt{n^6}}=\frac{n^{\frac{3}{2}}}{n^3}=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\quad (n\to\infty).$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ сходится, то сходится и исходный ряд.

в) Так как $\ln\dfrac{n+1}{n}=\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\sim\dfrac{1}{n}$ $(n\to\infty)$, то $\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\ln\dfrac{n+1}{n}\sim$ $\sim\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\cdot\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ $(n\to\infty)$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ сходится, значит, сходится и исходный ряд. ●

Исследовать ряд на сходимость, применяя 2-й признак сравнения. Указать общий член ряда, с которым сравнивается данный ряд.

1.1.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+5}{n^2-2}$.

1.1.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2-n}{n^3+n-1}$.

1.1.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+2}{3n+1}$.

1.1.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}$.

1.1.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n-1}{\sqrt{n^3+3n-1}}$.

1.1.29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}{n+\sqrt[3]{n^5}}$.

1.1.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(\dfrac{n^2+1}{n^2}\right)$.

1.1.31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin^2\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

1.1.32. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\cdot\sin\dfrac{\pi}{n^2}$.

1.1.33. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^5\cdot\operatorname{tg}^3\dfrac{2}{n^2}$.

1.1.34. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n+3}{5^n+2}$.

1.1.35. Исследовать ряды на сходимость, применяя признак Даламбера:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^5}{3^{n+1}}$. б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{n!}$.

○ а) Преобразуем выражение $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^5}{3^{(n+1)+1}} : \frac{n^5}{3^{n+1}} = \frac{(n+1)^5}{n^5} \cdot \frac{3^{n+1}}{3^{n+2}} = \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^5.$$

Так как $\frac{1}{n} \to 0$ при $n \to \infty$, то $\left(1 + \frac{1}{n}\right) \to 0$ и $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 \to 0$ при $n \to \infty$. Значит,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 = \frac{1}{3} < 1,$$

и исходный ряд сходится по признаку Даламбера.

б) Поскольку

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{(n+1)^n \cdot (n+1)}{n^n} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \cdot (n+1)} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 1 \quad \text{(2-й замечательный предел)},$$

и, значит, исходный ряд расходится. ●

Исследовать ряд на сходимость, применяя признак Даламбера. Указать $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

1.1.36. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n^2}$.

1.1.37. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3}{3^n}$.

1.1.38. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n}{n!}$.

1.1.39. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$.

1.1.40. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{n!2^n}$.

1.1.41. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (3n-2)}{n!2^n}$.

1.1.42. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 7 \cdot 12 \cdot \ldots \cdot (5n-3)}$.

1.1.43. Исследовать ряды на сходимость, применяя признак Коши:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+2}{2n+1}\right)^{3n+1}$. б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

○ а) Учитывая, что

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^{3n+1}} = \left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^{\frac{3n+1}{n}} = \left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^{3+\frac{1}{n}},$$

а $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{2n+1}=\dfrac{1}{2}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\dfrac{1}{n}\right)=3$, получим

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^{3+\frac{1}{n}}=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}<1.$$

Исходный ряд сходится по признаку Коши.

б) Так как $\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{n\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}}=n^{\frac{1}{n}}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{n^2}{n}}=n^{\frac{1}{n}}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$, то остается найти пределы $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.

1) Поскольку $n^{\frac{1}{n}}=e^{\ln(n^{\frac{1}{n}})}$, где $\ln(n^{\frac{1}{n}})=\frac{1}{n}\ln n$, то по правилу Лопиталя

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\ln n)'}{(n)'}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1}=0,$$

откуда $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}\ln n}=e^0=1$.

2) Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n=e^\alpha$ (следствие из 2-го замечательного предела), то $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=e^{-1}$. Отсюда

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=e^{-1}=\frac{1}{e}<1,$$

и, значит, исходный ряд сходится. ●

Исследовать ряд на сходимость, применяя признак Коши. Указать $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$.

1.1.44. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

1.1.45. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n-1}{2n+1}\right)^n$.

1.1.46. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n-1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$.

1.1.47. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$.

1.1.48. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{1}{n}\right)^n$.

1.1.49. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\cdot\left(\dfrac{3n+2}{2n+1}\right)^n$.

1.1.50. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$, применяя интегральный признак. Указать первообразную для функции $f(x)$ и $\int\limits_a^{+\infty}f(x)\,dx$.

❍ Так как $a_n=\dfrac{1}{n\ln n}$, то $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$. Проверим применимость интегрального признака Коши. Очевидно, что функция $f(x)$ непрерывна и принимает только положительные значения на промежутке $(2,+\infty)$. Убедимся, что $f(x)$ монотонно убывает на этом промежутке.

Пусть $2 < x_1 < x_2$. Тогда $\ln x_1 < \ln x_2$ и $x_1 \ln x_1 < x_2 \ln x_2$, откуда

$$f(x_1) = \frac{1}{x_1 \ln x_1} > \frac{1}{x_2 \ln x_2} = f(x_2).$$

Итак, функция $f(x)$ положительна, непрерывна и монотонно убывает на промежутке $(2, +\infty)$, значит, для использования данного ряда на сходимость можно применять интегральный признак сходимости.

Найдем неопределенный интеграл $\int f(x)\,dx$:

$$\int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \int d(\ln \ln x) = \ln \ln x + C.$$

Первообразной для функции $f(x)$ является, например, функция $\ln \ln x$.

Вычисляя несобственный интеграл $\int\limits_2^{+\infty}$, получим

$$\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{M \to +\infty} \int\limits_2^{M} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{M \to +\infty} \left(\ln \ln x \Big|_2^M \right) =$$

$$= \lim_{M \to +\infty} (\ln \ln M - \ln \ln 2) = +\infty.$$

Так как несобственный интеграл $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$ расходится, то расходится и ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$. ●

Исследовать ряд на сходимость, применяя интегральный признак. Указать первообразную для функции $f(x)$ и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

1.1.51. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$.

1.1.52. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$.

1.1.53. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$.

1.1.54. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p > 0$.

Исследовать ряд на сходимость. Указать применяемые признаки. Дополнительно указать:

1) для необходимого признака — $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$;

2) для 1-го и 2-го признаков сравнения — общий член ряда, с которым сравнивается данный ряд;

3) для признака Даламбера — $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$;

4) для признака Коши — $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n}$;

5) для интегрального признака — первообразную для $f(x)$ и $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$.

1.1.55. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{3n-2}$.

1.1.56. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$.

1.1.57. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+1}{2^n-1}$.

1.1.58. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}+2}$.

1.1.59. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

1.1.60. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^3+1}{n^3}\right)$.

1.1.61. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n-1}\right)^{n+1}$.

1.1.62. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[3]{\ln n}}$.

1.1.63. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{5n+2}\right)^{3n-2}$.

1.1.64. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^2+n}$.

1.1.65. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\frac{1}{n\sqrt{n}}$.

1.1.66. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+3}{n+2}\right)$.

1.1.67. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^3}{5^{\frac{n}{2}}}$.

1.1.68. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.

1.1.69. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{2n+1}\right)^{n+1}$.

1.1.70. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 4\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{n!}$.

Дополнительные задачи

Для каждого ряда:
а) написать формулу n-й частичной суммы S_n;
б) найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ или доказать, что этот предел не существует;
в) сделать вывод о сходимости или расходимости ряда.

1.1.71. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1 = 1+1+1+\ldots+1+\ldots$

1.1.72. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-n) = -1-2-3-\ldots-n-\ldots$

1.1.73. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n\cdot(2n-1) = -1+3-5+7-\ldots+(-1)^n\cdot(2n-1)+\ldots$

1.1.74. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^{n-1}} = 1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{5^{n-1}}+\ldots$

1.1.75. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{2}+(-1)^n\cdot\frac{1}{2}\right) = 2+3+2+3+\ldots+2+3+\ldots$

1.1.76. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{3}{1^2\cdot 2^2}+\frac{7}{3^2\cdot 4^2}+\ldots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}+\ldots$

Найти предел общего члена ряда a_n. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то, применяя необходимый признак сходимости, установить, что ряд расходится.

1.1.77. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n-1}$.

1.1.78. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\frac{3n-1}{2n+3}$.

1.1.79. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos\frac{1}{n^2}$.

1.1.80. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcctg}\frac{n+1}{n^2-3}$.

1.1.81. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n+1]{10}}$.

1.1.82. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^n}$.

1.1.83. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2+1}}$.

1.1.84. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{3n^2-1}$.

Исследовать ряд на сходимость, применяя 1-й признак сравнения. Указать общий член ряда, с которым сравнивается данный ряд.

1.1.85. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n}$.

1.1.86. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n}$.

1.1.87. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n}$.

1.1.88. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{5^n+1}$.

Исследовать ряд на сходимость, применяя 2-й признак сравнения. Указать общий член ряда, с которым сравнивается данный ряд.

1.1.89. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2+n}{n^2-3}$.

1.1.90. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{3n-2}$.

1.1.91. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+3n^2-2}{2n+5-n^5}$.

1.1.92. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4+n^2-1}}$.

1.1.93. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2+3\sqrt{n}}{2n-5}$.

1.1.94. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}+\sqrt{n^2}}{\sqrt{n^4+\sqrt{n^3}}}$.

1.1.95. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+2}{n}\right)$.

1.1.96. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^3 \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

1.1.97. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \ln \frac{n^2+4}{n^2+3}$.

1.1.98. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^4 \cdot \sin^2 \frac{2\pi}{n^3}$.

1.1.99. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{2^n+n}$.

Исследовать ряд на сходимость, применяя признак Даламбера. Указать $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

1.1.100. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^7}{5^{\frac{n}{2}}}$.

1.1.101. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{2^n \cdot n^4}$.

1.1.102. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$.

1.1.103. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{5^n}$.

1.1.104. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!3^n}{n^n}$.

1.1.105. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{n^2 \cdot 3^n}$.

1.1.106. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (4n-3)}$.

Исследовать ряд на сходимость, применяя признак Коши. Указать $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

1.1.107. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

1.1.108. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n-1}\right)^{n-1}$.

1.1.109. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{2n+1}$.

1.1.110. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(n+1)}$.

1.1.111. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

1.1.112. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{n}$.

Исследовать ряд на сходимость, применяя интегральный признак. Указать первообразную для функции $f(x)$ и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

1.1.113. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$.

1.1.114. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\ln(2n+1)}$.

1.1.115. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\ln\ln n}$.

1.1.116. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^2}$.

В задачах 1.1.117–1.1.131 исследовать ряд на сходимость и указать применяемые признаки. Дополнительно указать:

1) для необходимого признака — $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$;

2) для 1-го и 2-го признаков сравнения — общий член ряда, с которым сравнивается данный ряд;

3) для признака Даламбера — $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$;

4) для признака Коши — $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$;

5) для интегрального признака — первообразную для $f(x)$ и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

1.1.117. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+2)}$.

1.1.118. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!2^{n+1}}$.

1.1.119. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

1.1.120. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$.

1.1.121. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n^2+3}{n^2}\right)$.

1.1.122. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{n}$.

1.1.123. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos\frac{2n+1}{3n+2}$.

1.1.124. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$.

1.1.125. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3n)!}{(n!)^3 2^{3n}}$.

1.1.126. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot5\cdot\ldots\cdot(3n-1)}\cdot 2^n$.

1.1.127. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)\ln(3n-1)}$.

1.1.128. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\sqrt[n]{3}}$.

1.1.129. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\cdot\left(\frac{5n-3}{3n+2}\right)^{n+1}$.

1.1.130. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-\sqrt{n}}$.

1.1.131. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{2n+1}{n^3}$.

Контрольные вопросы и более сложные задания

1.1.132. Можно ли утверждать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$?

1.1.133. Является ли необходимым для сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ условие:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 2$;

б) не все члены ряда — числа a_n — равны 2;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$;

г) не все члены ряда — числа a_n — равны 0?

1.1.134. Верно ли, что

а) если ряд сходится, то его частичные суммы ограничены;

б) если частичные суммы ряда ограничены, то ряд сходится?

1.1.135. Существует ли ряд, который

а) по признаку Даламбера сходится, а по признаку Коши — расходится;

б) по признаку Коши сходится, а по признаку Даламбера — расходится;

в) по признаку Даламбера расходится, а по интегральному признаку — сходится?

1.1.136. Что можно сказать о сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$, если

а) ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся;

б) ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходятся;

в) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится?

1.1.137. Из того, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ сходится, следует ли, что

а) оба ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся;

б) оба ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходятся;

в) один из рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, а другой — расходится?

1.1.138. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n-1}}{n}$.

1.1.139. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^n n!}{n^n}$.