1.1.140. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{3^{k-1}}{4^{k-1}}, & n = 2k-1; \\ \dfrac{3^{k-1}}{4^k}, & n = 2k, \end{cases} \qquad k = 1, 2, \ldots$$

а) по признаку Даламбера;

б) по признаку Коши.

1.1.141. Привести пример двух рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, для которых ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$ расходится.

1.1.142. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^n}{(n!)^2} = 0$, исследовав на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{(n!)^2}$.

1.1.143. Вычислите предел: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n!)^n}{n^{n^2}}$.

§ 2. ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ РЯДЫ

Знакочередующиеся ряды

⇛ *Знакочередующимся* называется ряд, в котором любые два соседних члена имеют разные знаки. Таким образом, знакочередующийся ряд — это ряд вида

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n, \tag{2.1}$$

или

$$-a_1 + a_2 - a_3 + a_n + \ldots + (-1)^n a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n, \tag{2.2}$$

где все a_n — положительные действительные числа ($a_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$). ⇚

Признак Лейбница

Пусть дан знакочередующийся ряд (вида (2.1) или (2.2)). Если выполнены два условия:

1) $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_n > \ldots$ (абсолютные величины членов ряда монотонно убывают);

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (общий член ряда стремится к нулю при $n \to \infty$),

то ряд сходится.

⇛ Ряд, содержащий и положительные и отрицательные члены, называется *знакопеременным*. В частности, всякий знакочередующийся ряд является знакопеременным. ⇚

Теорема 1.4. Пусть дан знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где a_n — произвольные числа (действительные или комплексные). Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, составленный из абсолютных величин его членов, сходится, то данный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится.

В этом случае знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *абсолютно сходящимся.*

⇛ Если же знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, то данный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *условно сходящимся.* ⇚

Для ответа на вопрос об абсолютной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ к ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ можно применять все признаки, используемые при исследовании рядов с положительными членами.

Из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, вообще говоря, не следует. Однако, если, применяя к ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ признак Даламбера (или признак Коши), получаем предел $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l > 1$ (или $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l > 1$), то в этом случае оба ряда — $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — расходятся.

Пусть $\{a_n\}$ — последовательность комплексных чисел $a_n = b_n + ic_n$, где b_n и c_n — действительные числа для любого $n = 1, 2, \ldots$ Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (т. е. ряд $\sum(b_n + ic_n)$) сходится тогда и только тогда, когда сходятся два ряда — $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, причем в этом случае $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n + i \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$.

1.2.1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2\sqrt{n}-1}$.

○ 1. Исследуем на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ из абсолютных величин членов данного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}-1}.$$

Сравним этот ряд с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$. Так как $2\sqrt{n}-1 < 2\sqrt{n}$, то $\frac{1}{2\sqrt{n}-1} > \frac{1}{2\sqrt{n}}$ для всех n. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ расходится, так как расходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ (как ряд Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ при $p = \frac{1}{2} < 1$). Значит, по 1-му признаку сравнения расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}-1}$.

Итак, исходный ряд не является абсолютно сходящимся.

2. Выясним, сходится ли данный знакочередующийся ряд, применяя признак Лейбница.

а) Проверим, выполняется ли неравенство $a_n > a_{n+1}$ для абсолютных величин членов данного ряда:

$$a_n = \frac{1}{2\sqrt{n}-1} > \frac{1}{2\sqrt{n+1}-1} = a_{n+1}.$$

Данное неравенство эквивалентно неравенству $2\sqrt{n}-1 < 2\sqrt{n+1}-1$, которое верно для любого $n = 1, 2, \ldots$ Значит, $a_n > a_{n+1}$ для всех номеров $n = 1, 2, \ldots$

б) Найдем предел общего члена ряда:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}+1} = 0.$$

Таким образом, для данного знакочередующегося ряда выполнены оба условия, содержащиеся в признаке Лейбница, откуда следует, что исходный ряд сходится. Однако он не является абсолютно сходящимся, поэтому данный ряд сходится условно. ●

1.2.2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n - \ln n}$.

○ 1. Исследуем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ из абсолютных величин членов данного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n - \ln n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4-\ln 2} + \frac{1}{6 - \ln 3} + \ldots$$

Применяя 2-й признак сравнения, сравним этот ряд с расходящимся гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2n - \ln n} : \frac{1}{n} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2 - \frac{\ln n}{n}} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Следовательно, знакопостоянный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, а значит, исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ не является абсолютно сходящимся.

2. Теперь выясним, является ли данный знакопеременный ряд сходящимся, используя признак Лейбница.

а) Проверим, выполняется ли неравенство $a_n > a_{n+1}$ для всех номеров n, начиная с некоторого:

$$a_n = \frac{1}{2n - \ln n} > \frac{1}{2(n+1) - \ln(n+1)} = a_{n+1}.$$

Запишем последовательность неравенств, эквивалентных данному:

$$2n - \ln n < 2(n+1) - \ln(n+1);$$

$$\ln(n+1) - \ln n < 2(n+1) - 2n;$$

$$\ln\frac{n+1}{n} < 2;$$

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 2.$$

Так как $1+\frac{1}{n} \leqslant 2 < e$, то $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \ln e = 1 < 2$ для любого $n = 1, 2, \ldots$ Значит, неравенство $a_n > a_{n+1}$ выполняется для всех $n = 1, 2, \ldots$

б) Найдем предел общего члена ряда:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n-\ln n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{2n-\ln n}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{2-\frac{\ln n}{n}} = \frac{0}{2} = 0.$$

Итак, для данного знакочередующегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-\ln n}$ выполнены оба условия, содержащиеся в признаке Лейбница, значит, этот ряд сходится. Из этого и из того, что ряд не является абсолютно сходящимся, окончательно следует, что ряд сходится условно. ●

1.2.3. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{3^n}$.

❍ Исследуем на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ из абсолютных величин членов данного ряда, т. е. ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n},$$

используя признак Даламбера. Для этого сначала преобразуем выражение $\frac{a_{n+1}}{a_n}$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{3^{n+1}} : \frac{n}{3^n} = \frac{n+1}{n}\cdot\frac{3^n}{3^{n+1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{3}.$$

Найдем предел этого выражения:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3} < 1.$$

По признаку Даламбера отсюда следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$ сходится, а значит, исходный ряд сходится абсолютно. ●

1.2.4. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{n^2}$.

❍ Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\sin\frac{1}{n^2}\right|$ из модулей членов данного ряда, т. е. (так как $0 < \frac{1}{n^2} < 1$, и следовательно, $\sin\frac{1}{n^2} > 0$ для всех $n = 1, 2, \ldots$):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^2}.$$

Воспользуемся 2-м признаком сравнения, для чего сравним этот ряд с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Обозначив $t=\frac{1}{n^2}$ и учитывая, что $t\to 0$ при $n\to\infty$, имеем: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\frac{1}{n^2}:\frac{1}{n^2}\right)=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$ (1-й замечательный предел). Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится как ряд Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ при $p=2>1$, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^2}$. Отсюда следует, что исходный ряд сходится абсолютно. ●

1.2.5. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}.$$

❍ Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ из абсолютных величин членов данного ряда, т. е. ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}.$$

Для ответа на вопрос о сходимости полученного ряда применим признак Даламбера:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)(3(n+1)-2)}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)(2(n+1)+1)}:\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}=\frac{3n+1}{2n+3}.$$

Отсюда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n}}=\frac{3}{2}>1.$$

Но это значит, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится, т. е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ не является абсолютно сходящимся. Однако полученный результат $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3}{2}>1\right)$ позволяет сделать более сильное утверждение. Так как $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ для всех номеров n, начиная с некоторого, то $a_n\not\to 0$ $(n\to\infty)$, и стало быть (так как не выполняется необходимый признак сходимости), исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ расходится. ●

1.2.6. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2+1}{5n^2-2}$.

❍ Нетрудно показать, что для данного ряда не выполнен необходимый признак сходимости. В самом деле:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{5n^2-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n^2}}{5-\frac{2}{n^2}}=\frac{1}{5}\neq 0.$$

Следовательно, ряд расходится. ●

Доказать, что ряд сходится условно:

1.2.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$. **1.2.8.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{n(n+2)}$.

1.2.9. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n \sqrt{\ln \ln n}}$. **1.2.10.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-\sqrt{n}}$.

Доказать, что ряд сходится абсолютно:

1.2.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}$. **1.2.12.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n-2)!}$.

1.2.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n \ln^2 n}$.

1.2.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n!}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}$.

Доказать, что ряд расходится:

1.2.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot n$.

1.2.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (4n-1)}{5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n+2)}$.

1.2.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n^2-1}{5+2n^2}$. **1.2.18.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2^n} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Исследовать ряды на сходимость. Указать применяемые признаки. Дополнительно указать:

1) для необходимого признака — $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$*;*

2) для 1-го и 2-го признаков сравнения — общий член ряда, с которым сравнивается данный ряд;

3) для признака Даламбера — $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$*;*

4) для признака Коши — $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

1.2.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{e^{n+1}}$. **1.2.20.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n+1}{3n-1}$.

1.2.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n)!}{4^n n!}$. **1.2.22.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{3n-1}$.

1.2.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln^n \left(\frac{2n}{n+2}\right)$. **1.2.24.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin n}{n^2}$.

1.2.25. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$. **1.2.26.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln 2$.

1.2.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^2}{2^n}$.

1.2.28. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(3+i)^n}{n \cdot 2^n}$.

○ Применим к ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ из абсолютных величин членов данного ряда признак Даламбера:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|(3+i)^{n+1}|}{(n+1)\cdot 2^{n+1}} : \frac{|(3+i)^n|}{n \cdot 2^n} =$$
$$= \left|\frac{(3+i)^{n+1}}{(3+i)^n}\right| \cdot \frac{n2^n}{(n+1)2^{n+1}} = \frac{|3+i|}{2} \cdot \frac{n}{n+1},$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{|3+i|}{2}\cdot\frac{n}{n+1}\right) = \frac{|3+i|}{2} = \frac{\sqrt{3^2+1^2}}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2} > 1.$$

Следовательно, $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ для всех номеров n, начиная с некоторого, откуда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, и значит, исходный ряд расходится. ●

1.2.29. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+3i}{(2+i)n+1}\right)^n$.

○ Применим к ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ из абсолютных величин членов данного ряда признак Коши. Сначала преобразуем выражение $\sqrt[n]{|a_n|}$:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left|\left(\frac{n+3i}{(2+i)n+1}\right)^n\right|} = \left|\frac{n+3i}{(2+i)n+1}\right| = \frac{|n+3i|}{|(2n+1)+in|} =$$
$$= \frac{\sqrt{n^2+3^2}}{\sqrt{(2n+1)^2+n^2}} = \sqrt{\frac{n^2+9}{5n^2+4n+1}} = \sqrt{\frac{1+\frac{9}{n^2}}{5+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}}.$$

Отсюда

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1+\frac{9}{n^2}}{5+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{5}} < 1.$$

Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится, т. е. исходный ряд сходится абсолютно. ●

1.2.30. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{i^n}{\sqrt{n}}$.

○ 1. Поскольку $\left|\dfrac{i^n}{\sqrt{n}}\right| = \dfrac{|i|^n}{\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, то ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, имеет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Полученный ряд расходится как ряд Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ при $p=\frac{1}{2}<1$. Значит, исходный ряд не является абсолютно сходящимся.

2. Запишем члены данного ряда в алгебраической форме, т.е. в виде b_n+ic_n:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{\sqrt{n}}=\frac{i}{1}+\frac{i^2}{\sqrt2}+\frac{i^3}{\sqrt3}+\frac{i^4}{\sqrt4}+\frac{i^5}{\sqrt5}+\frac{i^6}{\sqrt6}+\frac{i^7}{\sqrt7}+\frac{i^8}{\sqrt8}+\dots=$$

$$=\frac{i}{1}-\frac{1}{\sqrt2}-\frac{i}{\sqrt3}+\frac{1}{\sqrt4}+\frac{i}{\sqrt5}-\frac{1}{\sqrt6}-\frac{i}{\sqrt7}+\frac{1}{\sqrt8}+\dots=$$

$$=(0+i)+\left(-\frac{1}{\sqrt2}+0i\right)+\left(0-\frac{i}{\sqrt3}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt4}+0i\right)+\left(0+\frac{i}{\sqrt5}\right)+$$

$$+\left(-\frac{1}{\sqrt6}+0i\right)+\left(0-\frac{i}{\sqrt7}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt8}+0i\right)+\dots$$

Составим два ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ic_n$ соответственно из действительных и мнимых частей членов последнего ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=0-\frac{1}{\sqrt2}+0+\frac{1}{\sqrt4}+0-\frac{1}{\sqrt6}+0+\frac{1}{\sqrt8}+\dots,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}ic_n=i+0-\frac{i}{\sqrt3}+0+\frac{i}{\sqrt5}+0-\frac{i}{\sqrt7}+0+\dots$$

Так как добавление (и удаление) произвольного числа членов ряда, равных нулю, не влияет на его сходимость, получим два ряда:

$$-\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt4}-\frac{1}{\sqrt6}+\frac{1}{\sqrt8}+\dots+(-1)^n\frac{1}{\sqrt{2n}}+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nb'_n,$$

$$i-\frac{i}{\sqrt3}+\frac{i}{\sqrt5}-\frac{i}{\sqrt7}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{i}{\sqrt{2n-1}}+\dots=i\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}c'_n.$$

Для знакочередующихся рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^nb'_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}c'_n$ выполняются оба условия признака Лейбница, так как при всех $n=1,2,3,\dots$ справедливы соотношения

$$b'_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{2(n+1)}}<\frac{1}{\sqrt{2n}}=b'_n \text{ и } \lim_{n\to\infty}b'_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n}}=0,$$

$$c'_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{2(n+1)-1}}=\frac{1}{\sqrt{2n+1}}<\frac{1}{\sqrt{2n-1}}=c'_n \text{ и } \lim_{n\to\infty}c'_n=0.$$

Значит, ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^nb'_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}c'_n$ сходятся, т.е. сходятся ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$. Отсюда следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{\sqrt n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n+i\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ сходится. Поскольку в пункте 1 задачи установлено, что исходный ряд не является абсолютно сходящимся, значит, он сходится условно. ●

Исследовать ряды на сходимость. Указать применяемые признаки. Дополнительно указать:

1) для необходимого признака — $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$*;*

2) для 1-го и 2-го признаков сравнения — общий член ряда, с которым сравнивается данный ряд;

3) для признака Даламбера — $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$*;*

4) для признака Коши — $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

1.2.31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+i\sqrt{n}}$. **1.2.32.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+i}{3}\right)^n$.

1.2.33. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2+i)^n}$. **1.2.34.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{i^{2n}}{\sqrt{n}}$.

1.2.35. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+i}{3ni-2}\right)^n$. **1.2.36.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3-i}{2}\right)^n$.

1.2.37. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n + i\sin n}{n^2}$.

Дополнительные задачи

Доказать, что ряд сходится условно:

1.2.38. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+2}$. **1.2.39.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n\sqrt[3]{\ln n+2}}$.

1.2.40. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$. **1.2.41.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+3}{n^2+4}$.

Доказать, что ряд сходится абсолютно:

1.2.42. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}$.

1.2.43. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{tg} \frac{1}{n\sqrt{n}}$. **1.2.44.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n 3^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

1.2.45. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos 3n}{2^n}$.

Доказать, что ряд расходится:

1.2.46. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln(n+1)$. **1.2.47.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n!}{2n^2}$.

1.2.48. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n(n-1)}$. **1.2.49.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{n+3}{2n+1}$.

Исследовать ряд на сходимость:

1.2.50. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n+2}{2n+5}$.

1.2.51. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}n}{(2n+1)\cdot 3^n}$.

1.2.52. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n+2}{3n^2\sqrt{n}+1}$.

1.2.53. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{3^{n^2}}{n^n}$.

1.2.54. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{3n}{n(n+1)}$.

1.2.55. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\cos(n+2)}{3^n}$.

1.2.56. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n(2+\ln n)^3}$.

1.2.57. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n^2}{n\sqrt{n}+3n}$.

1.2.58. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\ln(n+1)}{n}$.

1.2.59. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{i(n+2i)}{3n}\right)^n$.

1.2.60. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(2+i)^n}{3^n}$.

1.2.61. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{i+(-1)^n\cdot n}{n^2}$.

1.2.62. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(1+i)^n}{3^n}$.

1.2.63. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+i)\sqrt{n}}$.

1.2.64. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{i^n}{n}$.

1.2.65. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos in}{3^n}$.

1.2.66. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n}+in}$.

Контрольные вопросы и более сложные задания

1.2.67. Верно ли, что

а) если ряд абсолютно сходится, то он сходится и условно;

б) если ряд сходится условно, то он не сходится абсолютно?

1.2.68. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n^2+n}{2}}\cdot\dfrac{n}{2^n}$.

1.2.69. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\operatorname{sh} n}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 n+1}}$.

1.2.70. Верно ли, что если знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ сходится, то $a_n\to 0$ $(n\to\infty)$ монотонно?

1.2.71. Верно ли для знакопеременного ряда, что

а) если последовательность a_n монотонна, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cdot(-1)^n$ сходится;

б) если $a_n\to 0$ $(n\to\infty)$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ сходится;

в) если $a_n\to 0$ $(n\to\infty)$ монотонно, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ сходится условно;

г) если $a_n\to 0$ $(n\to\infty)$ монотонно, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ сходится.

1.2.72. Доказать для знакопеременных рядов следующие утверждения:

а) ряд сходится абсолютно тогда и только тогда, когда сходятся два ряда — ряд из положительных членов и ряд из отрицательных членов;

б) если ряд сходится условно, то расходятся два ряда — ряд из положительных членов и ряд из отрицательных членов;

в) если один из двух рядов (с положительными членами и отрицательными членами) сходится, а другой — расходится, то исходный ряд расходится.

1.2.73. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно, что можно сказать о сходимости ряда из его положительных членов?

1.2.74. Исследовать ряд на сходимость:

а) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5^2} - \ldots \; a_n = \begin{cases} -\frac{1}{n}, & n \text{ — четное;} \\ -\frac{1}{n^2}, & n \text{ — нечетное.} \end{cases}$

б) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^5} + \ldots \; a_n = \begin{cases} -\frac{1}{2^{k-1}}, & n = 2k-1; \\ -\frac{1}{3^{2k-1}}, & n = 2k. \end{cases}$

в) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{3^3} + \ldots, \; a_{2k-1} = \frac{1}{2k-1}, \; a_{2k} = -\frac{1}{3^k}.$

г) $\frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{7} - \frac{1}{5} + \frac{1}{11} - \frac{1}{9} + \ldots, \; a_{2k-1^2} = \frac{1}{4k-1}, \; a_{2k} = -\frac{1}{4^k-3}.$

д) $\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \ldots, \; a_{2k-1} = \frac{1}{\sqrt{k+1}-1},$
$a_{2k} = -\frac{1}{\sqrt{k+1}+1}.$

1.2.75. Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} a_n$ сходится абсолютно.

1.2.76. Доказать, что если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ сходятся абсолютно, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится абсолютно.

1.2.77. Доказать, что если ряд сходится абсолютно, то и ряд, полученный из исходного с помощью произвольной перестановки его членов, также сходится абсолютно, причем к той же сумме, что и исходный ряд.

1.2.78. *Теорема Римана.* Доказать, что если ряд сходится условно, то существует такая перестановка его членов, что полученный ряд сходится к любому наперед заданному числу или расходится заданным образом (к $+\infty$, к $-\infty$ или к ∞).