Глава 6. ФУНКЦИИ И ПРЕДЕЛЫ

❑

§ 1. ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ

Определение функции

Везде далее в этом параграфе под множествами будут пониматься числовые множества, т. е. множества, состоящие из действительных чисел.

Множество всех действительных чисел будет обозначаться буквой $\mathbb{R}$.

⇛ Пусть каждому числу x из некоторого множества X поставлено в соответствие одно и только одно число y. Тогда говорят, что на множестве X задана *функция*.

Способ (правило), с помощью которого устанавливается соответствие, определяющее данную функцию, обозначают той или иной буквой: f, g, h, $\varphi, \ldots$ Если, например, выбрана буква f, то пишут

$$y = f(x).$$

Переменная x при этом называется *независимой* переменной (или *аргументом*), а переменная y — *зависимой*.

Множество X называется *областью определения* данной функции и обозначается $D(f)$, а множество всех чисел y, соответствующих различным числам $x \in X$, — *областью значений* этой функции и обозначается $E(f)$.

⇛ Если числу x_0 из области определения функции $f(x)$ соответствует некоторое число y_0 из области значений, то y_0 называется *значением функции* в точке x_0 (или при $x = x_0$).

График функции

⇛ Пусть заданы прямоугольная система координат Oxy и функция $y = f(x)$. *Графиком функции* $f(x)$ называется множество всех точек плоскости с координатами $(x; f(x))$, где $x \in D(f)$.

Множество точек на координатной плоскости является графиком некоторой функции в том и только в том случае, когда каждая вертикальная (т. е. параллельная оси Oy) прямая пересекает его не более чем в одной точке.

График функции $y = f(x)$ зачастую можно построить с помощью преобразований (сдвиг, растяжение) графика некоторой уже известной функции.

В частности:

1. График функции $y = f(x) + a$ получается из графика функции $y = f(x)$ сдвигом вдоль оси Oy на $|a|$ единиц (вверх, если $a > 0$, и вниз, если $a < 0$);

2. График функции $y = f(x - b)$ получается из графика функции $y = f(x)$ сдвигом вдоль оси Ox на $|b|$ единиц (вправо, если $b > 0$, и влево, если $b < 0$);

3. График функции $y = kf(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ растяжением (сжатием) вдоль оси Oy в k раз ($1/k$ раз), если $k > 1$ ($k \in (0, 1)$);

4. График функции $y = f(mx)$ получается из графика функции $y = f(x)$ сжатием (растяжением) по оси Ox в m раз ($1/m$ раз), если $m > 1$ ($m \in (0, 1)$);

5. График функции $y = -f(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ симметричным отражением относительно оси Ox;

6. График функции $y = f(-x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ симметричным отражением относительно оси Oy.

Четность, нечетность и периодичность функции

⇒ Функция называется *четной*, если:
1) множество $D(f)$ симметрично относительно нуля (т. е. $\forall x \in D(f) \Longrightarrow -x \in D(f)$);
2) для любого $x \in D(f)$ справедливо равенство $f(-x) = f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси Oy.

⇒ Функция $f(x)$ называется *нечетной*, если:
1) множество $D(f)$ симметрично относительно нуля;
2) для любого $x \in D(f)$ справедливо равенство $f(-x) = -f(x)$.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Функция, не являющаяся ни четной, ни нечетной, называется *функцией общего вида.*

⇒ Функция $f(x)$ называется *периодической*, если существует число $T \neq 0$, что для любого $x \in D(f)$ справедливы условия:
1) $x + T \in D(f)$, $x - T \in D(f)$;
2) $f(x + T) = f(x)$.

Число T называется *периодом* функции $f(x)$. Если T — период функции $f(x)$, то числа $\pm T$, $\pm 2T$, $\pm 3T, \ldots$ также являются периодами этой функции. Как правило, под периодом функции понимают наименьший из ее положительных периодов (*основной период*), если таковой существует.

Если функция $f(x)$ периодическая с периодом T, то ее график переходит сам в себя при сдвиге вдоль оси Ox на T единиц влево или вправо.

Сложная функция. Элементарные функции

⇛ Пусть область значений функции $y = f(x)$ содержится в области определения функции $g(y)$. Тогда функция

$$z = g(f(x)),\ x \in D(f)$$

называется *сложной функцией* или *композицией* функций f и g и обозначается $g \circ f$.

Основными (или *простейшими*) *элементарными функциями* называются: *постоянная функция* $y = c$; *степенная функция* $y = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$; *показательная функция* $y = a^x$, $a > 0$; *логарифмическая функция* $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$; *тригонометрические функции* $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \sec x$ $\left(\text{где } \sec x = \dfrac{1}{\cos x}\right)$, $y = \operatorname{cosec} x$ $\left(\text{где } \operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\sin x}\right)$; *обратные тригонометрические функции* $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

На рисунках 68,*а* и 68,*б* приведены соответственно графики функций $y = \arcsin x$ и $y = \operatorname{arctg} x$.

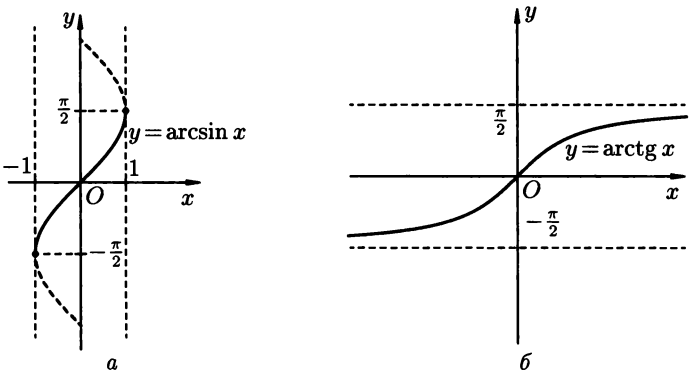

Рис. 68

⇛ *Элементарными функциями* называются функции, которые получаются из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических операций (+, −, ·, :) и композиций (т. е. образования сложных функций).

Монотонная, обратная и ограниченная функция

⇛ Функция $f(x)$ называется *неубывающей* (*невозрастающей*) на множестве $X \subseteq D(f)$, если для любых значений $x_1, x_2 \in X$ таких, что $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ (соответственно, $f(x_1) \geqslant f(x_2)$).

⇛ Функция $f(x)$ называется *монотонной*, если она невозрастающая или неубывающая.

⇛ Функция $f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) на множестве $X \subseteq D(f)$, если для любых значений $x_1, x_2 \in X$ таких, что $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ (соответственно, $f(x_1) > f(x_2)$).

⇛ Функция $f(x)$ называется *строго монотонной*, если она возрастающая или убывающая.

⇛ Пусть для любых различных значений $x_1, x_2 \in D(f)$ справедливо, что $f(x_1) \neq f(x_2)$. Тогда для любого $y \in E(f)$ найдется только одно значение $x = g(y) \in D(f)$, такое, что $y = f(x)$. Функция $x = g(y)$, определенная на $E(f)$, называется *обратной* для функции $f(x)$.

Отметим, что $E(g) = D(f)$.

Если функция $f(x)$ имеет обратную функцию, то каждая горизонтальная прямая $y = c$ пересекает ее график не более чем в одной точке.

Пусть функция $x = g(y)$ (иногда ее обозначают $x = f^{-1}(y)$) — обратная для функции $y = f(x)$. Если обозначить аргумент этой функции через x, то ее можно записать в виде $y = g(x)$. Тогда

$$g(f(x)) = x \text{ для всех } x \in D(f),$$

$$f(g(x)) = x \text{ для всех } x \in E(f).$$

Иными словами, если функция $g(x)$ — обратная для функции $f(x)$, то функция $f(x)$ — обратная для функции $g(x)$; поэтому обе эти функции называют еще *взаимообратными*.

Пусть функция $y = f(x)$ вырастает (убывает) на отрезке $[a; b]$. Тогда на отрезке $[f(a); f(b)]$ (соответственно, $[f(b); f(a)]$) определена возрастающая (убывающая) функция $g(x)$, обратная для функции $f(x)$.

График функции $g(x)$, обратной для функции $f(x)$, симметричен графику $f(x)$ относительно прямой $y = x$.

⇛ Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной сверху (снизу) на множестве* $X \subseteq D(f)$, если существует такое число M, что

$$f(x) \leqslant M \quad (f(x) \geqslant M) \text{ для всех } x \in X.$$

⇛ Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной на множестве* $X \subseteq D(f)$, если существует такое число $M > 0$, что

$$|f(x)| \leqslant M \text{ для всех } x \in X.$$

Гиперболические функции

Гиперболическими функциями называются следующие четыре функции:

1) *гиперболический синус* $y = \operatorname{sh} x$, где $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ (график этой нечетной возрастающей функции изображен на рис. 69,*а*);

2) *гиперболический косинус* $y = \operatorname{ch} x$, где $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ (график этой четной функции см. на рис. 69,*б*);

3) *гиперболический тангенс* $y = \operatorname{th} x$, где $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ (график этой нечетной возрастающей функции см. на рис. 69,*в*);

4) *гиперболический котангенс* $y = \operatorname{cth} x$, где $\operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ (график этой нечетной убывающей функции см. на рис. 69,*г*).

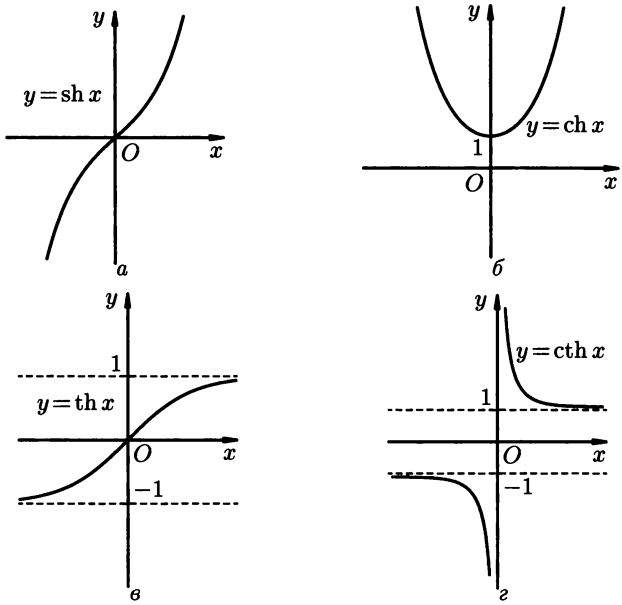

Рис. 69

Для гиперболических функций имеют место формулы, аналогичные (с точностью до знака) соответствующим формулам для обычных тригонометрических функций:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x,$$
$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y,$$
$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y \quad \text{и т. д.}$$

Неявные и параметрически заданные функции

Формула $y = f(x)$ определяет явный способ задания функции. Однако во многих случаях приходится использовать неявный способ задания функции.

⇛ Пусть данная функция определена на множестве D. Тогда, если каждое значение $x \in D$ и соответствующее ему значение функции y удовлетворяют некоторому (одному и тому же) уравнению $F(x;y) = 0$, то говорят, что эта *функция задана неявно уравнением* $F(x;y) = 0$. Сама функция в этом случае называется *неявной функцией*.

⇛ *Графиком уравнения* $F(x;y) = 0$ называется множество всех точек координатной плоскости Oxy, координаты которых удовлетворяют этому уравнению.

Пусть на некотором множестве $X \subset R$ заданы две функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$. Тогда множество всех точек на плоскости Oxy с координатами $(x(t), y(t))$, где $t \in X$, называется *кривой* (или линией), *заданной параметрически*.

Если кривая, заданная параметрически, является графиком некоторой функции $y = f(x)$, то эта функция также называется *функцией, заданной параметрически* (или параметрически заданной).

6.1.1. Найти области определения функций:

1) $f(x) = \dfrac{3x+1}{x^2-1}$;

2) $f(x) = \sqrt{5-3x}$;

3) $f(x) = \ln(x+2)$.

❍ 1) Дробь $\dfrac{3x+1}{x^2-1}$ определена, если ее знаменатель не равен нулю. Поэтому область определения данной функции находится из условия $x^2 - 1 \neq 0$, т. е. $x \neq \pm 1$. Таким образом, $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

2) Функция $f(x) = \sqrt{5-3x}$ определена, если подкоренное выражение неотрицательно, т. е. $5 - 3x \geqslant 0$. Отсюда $x \leqslant \frac{5}{3}$, и, значит, $D(f) = \left(-\infty; \frac{5}{3}\right]$.

3) Выражение, стоящее под знаком логарифма, должно быть положительным, поэтому функция $\ln(x+2)$ определена в том и только в том случае, когда $x + 2 > 0$, т. е. $x > -2$. Значит, $D(f) = (-2; +\infty)$. ●

6.1.2. Найти области определения функций:

1) $f(x) = 2^{\frac{1}{x}} + \arcsin\dfrac{x+2}{3}$;

2) $f(x) = \dfrac{5}{\sqrt[3]{2x-x^2}} - 7\cos 2x$.

○ 1) Функция a^x, $a > 0$ определена при всех действительных значениях x, поэтому функция $2^{\frac{1}{x}}$ определена в точности при тех значениях x, при которых имеет смысл выражение $\frac{1}{x}$, т. е. при $x \neq 0$.

Далее, область определения второго слагаемого находим из двойного неравенства $-1 \leqslant \frac{x+2}{3} \leqslant 1$. Отсюда $-3 \leqslant x+2 \leqslant 3$, т. е. $-5 \leqslant x \leqslant 1$.

Область определения функции $f(x)$ есть пересечение областей определения обоих слагаемых, откуда $D(f)=[-5;0)\cup(0;1]$.

2) Функция $7\cos 2x$ определена при всех действительных значениях x, а функция $\frac{5}{\sqrt[3]{2x-x^2}}$ — лишь при тех значениях x, при которых $2x - x^2 \neq 0$, т. е. при $x \neq 0$, $x \neq 2$.

Таким образом, $D(f) = (-\infty;0) \cup (0;2) \cup (2;+\infty)$. ●

Найти области определения функций:

6.1.3. $f(x) = \frac{x^2+4}{x^3+1}$.

6.1.4. $f(x) = \sin\frac{1}{|x|-2}$.

6.1.5. $f(x) = \log_3(-x)$.

6.1.6. $f(x) = \sqrt[4]{x^2-7x+10}$.

6.1.7. $f(x) = x^2 + \operatorname{tg} x$.

6.1.8. $f(x) = \sqrt{x-7} + \sqrt{10-x}$.

6.1.9. $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{|x^2-2|}}$.

6.1.10. $f(x) = \sqrt[4]{x+2} + \frac{1}{\sqrt[6]{1-x}}$.

6.1.11. $f(x) = e^{\sqrt{x}} \cdot \log_2(2-3x)$.

6.1.12. $f(x) = \arccos(x-2) - \ln(x-2)$.

6.1.13. Найти множества значений функций:

1) $f(x) = x^2 + 4x + 1$;

2) $f(x) = 2^{x^2}$;

3) $f(x) = 3 - 5\cos x$.

○ 1) Так как $x^2 + 4x + 1 = (x+2)^2 - 3$, а $(x+2)^2 \geqslant 0$ для всех значений x, то $f(x) \geqslant -3$ для всех x. Поскольку к тому же функция $(x+2)^2$ принимает все значения от 0 до ∞, то $E(f) = [-3;+\infty)$.

2) $E(x^2) = [0;+\infty)$, поэтому множество значений функции 2^{x^2} совпадает с множеством значений функции 2^x при $x \geqslant 0$. Отсюда $E(f) = [1;+\infty)$.

3) $E(\cos x) = [-1;1]$, откуда $E(-5\cos x) = [-5;5]$. Так как $f(x) = -5\cos x + 3$, то $E(f) = [-2;8]$. ●

Найти множество значений функций:

6.1.14. $f(x) = x^2 - 8x + 20.$

6.1.15. $f(x) = 3^{-x^2}.$

6.1.16. $f(x) = 2\sin x - 7.$

6.1.17. $f(x) = \frac{1}{x} + 4.$

6.1.18. $f(x) = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x.$

6.1.19. $f(x) = \sqrt{5 - x} + 2.$

6.1.20. Для функции $f(x) = \frac{x+3}{x^2-1}$ найти:

1) $f(0)$;
2) $f(-2)$;
3) $f(\sqrt{2})$;
4) $f(-x)$;
5) $f\left(\frac{1}{x}\right)$;
6) $f(a+1)$;
7) $f(a) + 1$;
8) $f(2x)$.

1)–3). Подставляя значение $x = 0$ в аналитическое выражение для данной функции, получим: $f(0) = \frac{0+3}{0^2-1} = -3$. Аналогично находим $f(-2) = \frac{-2+3}{(-2)^2-1} = \frac{1}{3}$, $f(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}+3}{(\sqrt{2})^2-1} = \sqrt{2} + 3$.

4)–6). Для того, чтобы найти $f(-x)$, надо формально заменить x в формуле для $f(x)$ на $-x$. Тогда $f(-x) = \frac{-x+3}{(-x)^2-1} = \frac{3-x}{x^2-1}$. Точно так же найдем $f(\frac{1}{x}) = \frac{\frac{1}{x}+3}{\left(\frac{1}{x}\right)^2-1} = \frac{3x^2+x}{1-x^2}$, $f(a+1) = \frac{(a+1)+3}{(a+1)^2-1} = \frac{a+4}{a^2+2a}$.

7) $f(a) + 1 = \frac{a+3}{a^2-1} + 1 = \frac{a^2+a+2}{a^2-1}$.

8) $f(2x) = \frac{2x+3}{(2x)^2-1} = \frac{2x+3}{4x^2-1}$. ●

6.1.21. Для функции $f(x) = x^3 \cdot 2^x$ найти:

1) $f(1)$;
2) $f(-3)$;
3) $f(-\sqrt[3]{5})$;
4) $f(-x)$;
5) $f(3x)$;
6) $f\left(\frac{1}{x}\right)$;
7) $\frac{1}{f(x)}$;
8) $f(b-2)$.

6.1.22. Для функции $\varphi(t) = \frac{\sqrt{t+5}}{t^2}$ найти:

1) $\varphi(-1)$;
2) $\varphi(-5)$;
3) $\varphi(\frac{5}{4})$;
4) $\varphi(z+3)$;
5) $\varphi(2t-1)$.

6.1.23. Какие из следующих функций четные, какие нечетные, а какие — общего вида:

1) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$;

2) $f(x) = x^4 - 5|x|$;

3) $f(x) = e^x - 2e^{-x}$;

4) $f(x) = \ln\dfrac{1-x}{1+x}$.

○ 1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$, и, стало быть, область определения функции симметрична относительно начала координат. Кроме того, $f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{(-x)^2+1} = -\dfrac{x^3}{x^2+1} = -f(x)$, т. е. данная функция нечетная.

2) $D(f) = (-\infty; +\infty)$ и $f(-x) = (-x)^4 - 5|-x| = x^4 - 5|x| = f(x)$. Следовательно, функция четная.

3) $D(f) = (-\infty; +\infty)$ и $f(-x) = e^{-x} - 2e^x \neq \pm f(x)$, т. е. данная функция общего вида.

4) $D(f) = (-1; 1)$, т. е. область определения симметрична относительно нуля. К тому же $f(-x) = \ln\dfrac{1+x}{1-x} = \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{-1} = -\ln\dfrac{1-x}{1+x} = -f(x)$, т. е. функция нечетная. ●

6.1.24. Какие из следующих функций четные, какие нечетные, а какие — общего вида:

1) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$;

2) $f(x) = x^5 + 3x^3 - x$;

3) $f(x) = \sqrt{x}$;

4) $f(x) = \arcsin x$;

5) $f(x) = \sin x + \cos x$;

6) $f(x) = |x| - 2$;

7) $f(x) = \dfrac{3}{x^2-1}$;

8) $f(x) = x \cdot e^x$.

6.1.25. Определить, является ли данная функция периодической, и найти ее наименьший положительный период, если он существует:

1) $f(x) = \sin 4x$;

2) $f(x) = \cos^2 5x$;

3) $f(x) = \operatorname{tg}\dfrac{x}{3}$;

4) $f(x) = \sin 2x + \cos 3x$;

5) $f(x) = x^2$.

○ 1) Наименьшим положительным периодом функции $\sin x$ является число 2π. Покажем, что наименьший положительный период $\sin 4x$ — число $\dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$.

Действительно, $\sin 4\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(4x + 2\pi) = \sin 4x$, т. е. $T = \frac{\pi}{2}$ — период данной функции. С другой стороны, если $T_1 > 0$ — какой-либо другой период этой функции, то $\sin 4(x + T_1) = \sin 4x$ для всех x, т. е. $\sin(4x + 4T_1) = \sin 4x$, $x \in \mathbb{R}$. Отсюда следует, что $4T_1$ — период функции $\sin t$, где $t = 4x$, и, значит, $4T_1 \geqslant 2\pi$, т. е. $T_1 \geqslant \frac{\pi}{2}$.

Таким образом, $T = \frac{\pi}{2}$ — наименьший положительный период функции $\sin 4x$.

Аналогично можно показать (см. также задачу 6.1.123), что наименьший положительный период функций $\sin(kx + b)$ и $\cos(kx + b)$ $(k \neq 0)$ — это число $\frac{2\pi}{k}$.

2) Поскольку $\cos^2 5x = \frac{1 + \cos 10x}{2}$, то период данной функции совпадает с периодом функции $\cos 10x$. Рассуждая как и в пункте 1), легко показать, что наименьший положительный период функции $\cos 10x$ равен $\frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$. Таким образом, наименьший положительный период функции $f(x)$ равен $\frac{\pi}{5}$.

3) Наименьший положительный период $\operatorname{tg} x$ равен π, поэтому наименьший положительный период функции $\operatorname{tg} \frac{x}{3}$ будет равен (см. рассуждения в пункте 1)) $\frac{\pi}{(1/3)} = 3\pi$.

4) Наименьшие положительные периоды функций $\sin 2x$ и $\cos 3x$ соответственно равны (см. пункты 1) и 2)) $\frac{2\pi}{2}$, т. е. π, и $\frac{2\pi}{3}$. Нетрудно показать (см. также задачу 6.1.124), что наименьший положительный период суммы этих функций будет равен наименьшему общему кратному их периодов, т. е. числу 2π.

5) При $x > 0$ функция определена и возрастает, поэтому не может быть периодической. Значит, и на интервале $(-\infty; +\infty)$ функция не является периодической. ●

6.1.26. Какие из следующих функций периодические, а какие — нет? Там, где это возможно, найти наименьший положительный период функции:

1) $f(x) = \cos \frac{x}{4}$;

2) $f(x) = |x|$;

3) $f(x) = \operatorname{tg}(2x - 1)$;

4) $f(x) = \sin \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} x$;

5) $f(x) = \sin 3x \cdot \cos 3x$.

Наибольшее целое число, не превосходящее x (т. е. ближайшее слева на числовой оси), называется *целой частью* x и обозначается $[x]$ (или $E(x)$). Например, $[\pi] = 3$, $[-4{,}5] = -5$ и т. д.

Число $x - [x]$ называется *дробной частью* x и обозначается $\{x\}$. Так $\{1{,}8\} = 0{,}8$, $\{-2{,}7\} = 0{,}3$ и т. д.

6.1.27. Построить график функции:

1) $y = [x]$;

2) $y = \{x\}$.

1) Функция $[x]$ равна n на каждом полуинтервале $[n; n+1)$, поэтому ее график имеет следующий «ступенчатый» вид (рис. 70).

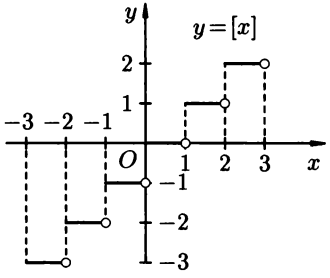

Рис. 70

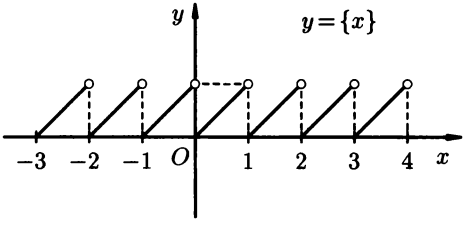

Рис. 71

2) На каждом полуинтервале $[n; n+1)$ имеем: $[x] = n$, поэтому функция $\{x\}$ принимает одни и те же значения. Таким образом, достаточно построить ее график на $[0; 1)$ (здесь $\{x\} = x$), а затем параллельно перенести эту часть на все остальные промежутки. В итоге получим график, изображенный на рисунке 71. ●

6.1.28. Построить график функции:

1) $y = x^2 + 4x + 3$;

2) $y = -2\sin 3x$;

3) $y = \left|\{x\} - \frac{1}{2}\right|$.

1) Выделяя полный квадрат в данном квадратном трехчлене, преобразуем функцию к виду $y = (x+2)^2 - 1$. Теперь ясно, что для построения графика функции, достаточно сначала сместить параболу $y = x^2$ влево на 2 единицы (получается график функции $y = (x+2)^2$), а затем на 1 единицу вниз (рис. 72).

2) Сжав стандартную синусоиду $y = \sin x$ в три раза к оси Oy, получим график функции $y = \sin 3x$ (рис. 73). Растянув полученный график в два раза вдоль оси Oy, получим график

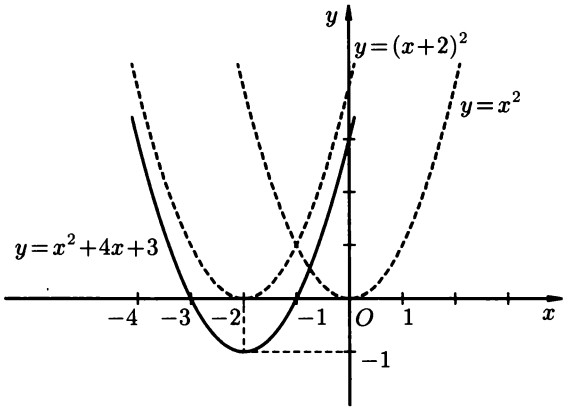

Рис. 72

функции $y = 2\sin 3x$ (рис. 74 а)). Осталось отразить последний график относительно оси Ox, результатом будет искомый график (рис. 74 б)).

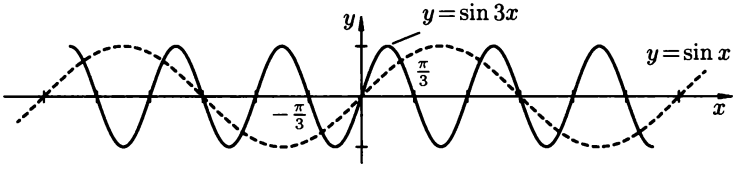

Рис. 73

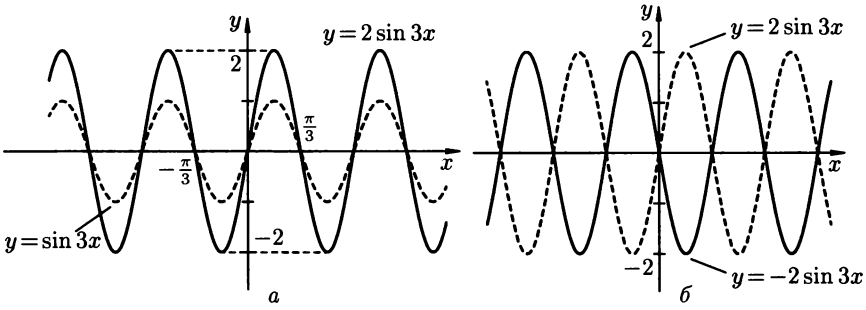

Рис. 74

3) Опустив на $\frac{1}{2}$ вниз график дробной части x (рис. 71), получим график функции $y = \{x\} - \frac{1}{2}$ (рис. 75 а)). Теперь те

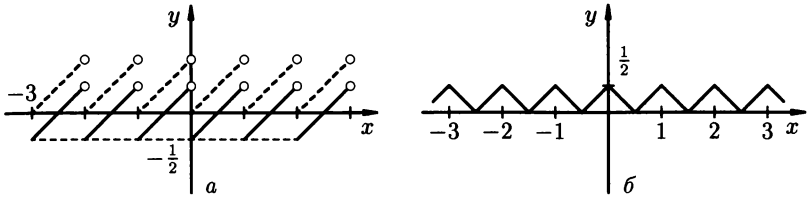

Рис. 75

части этого графика, которые расположены ниже оси Ox, отражаем относительно этой оси — в итоге имеем искомый график (рис. 75 б)). ●

Построить графики функций:

6.1.29. $y = |x - 3|$.

6.1.30. $y = x^2 - 6x + 11$.

6.1.31. $y = 3\cos 2x$.

6.1.32. $y = -\dfrac{2}{x} + 1$.

6.1.33. $y = 2^{x-1} + 3$.

6.1.34. $y = \log_3(-x)$.

6.1.35. $y = \operatorname{tg}|x|$.

6.1.36. $y = \dfrac{x+4}{x+2}$.

6.1.37. Найти сложные функции $f \circ g$ и $g \circ f$, где
1) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$;
2) $f(x) = x^3$, $g(x) = 2x - 1$.

○ 1) По определению композиции функций имеем $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{x^2} = |x|$, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (\sqrt{x})^2 = x$, $x \geqslant 0$.

2) Аналогично, $(f \circ g)(x) = (2x-1)^3$, $(g \circ f)(x) = 2x^3 - 1$. ●

6.1.38. Найти сложные функции $f \circ g$ и $g \circ f$, где
1) $f(x) = e^x$, $g(x) = \ln x$;
2) $f(x) = 3x + 1$, $g(x) = 2x - 5$;
3) $f(x) = |x|$, $g(x) = \cos x$.

6.1.39. Найти обратную функцию для данной:
1) $y = x - 1$;
2) $y = \dfrac{2}{x+3}$;
3) $y = \sqrt{x}$.

○ 1) Функция $y = x - 1$ возрастает на промежутке $(-\infty; +\infty)$, а значит, для любых $x_1 \neq x_2$ имеем: $f(x_1) \neq f(x_2)$. Отсюда следует, что на $(-\infty; +\infty)$ эта функция имеет обратную. Для того, чтобы найти эту обратную функцию, разрешим уравнение $y = x - 1$ относительно x, откуда $x = y + 1$. Записывая полученную формулу в традиционном виде (т. е. меняя x и y местами), найдем окончательно: $y = x + 1$ — обратная функция к исходной.

2) Функция $y = \dfrac{2}{x+3}$ убывает на множестве $(-\infty; -3) \cup$ $\cup(-3; +\infty)$, являющейся областью определения. Поэтому у нее есть обратная, которую найдем, разрешая уравнение $y = \dfrac{2}{x+3}$ относительно x.

Отсюда получим, что функция $y = \dfrac{2}{x} - 3$ — обратная к исходной.

3) Функция $y = \sqrt{x}$ возрастает на промежутке $[0; +\infty)$ и, стало быть, имеет обратную. Рассуждая, как в пунктах 1) и 2), найдем обратную функцию $y = x^2$, $x \in [0; +\infty)$. Область определения этой функции совпадает с областью значений исходной функции $y = \sqrt{x}$, т. е. с промежутком $[0; +\infty)$. ●

6.1.40. Доказать, что функция $y = x^2$ не имеет обратной на интервале $(-\infty; +\infty)$.

◐ Для любого $y_0 > 0$ уравнение $y_0 = x^2$ имеет два решения $x_1 = \sqrt{y_0}$ и $x_2 = -\sqrt{y_0}$ (т. е. каждая горизонтальная прямая $y = y_0$ пересекает график функции $y = x^2$ в двух точках). Но функция имеет обратную только в том случае, если такое решение единственно. Значит, данная функция действительно не имеет обратной на интервале $(-\infty; +\infty)$. ●

Какие из следующих функций имеют обратные? Для таких функций найти обратные функции.

6.1.41. $y = 3x + 5$.

6.1.42. $y = x^3 - 2$.

6.1.43. $y = |x|$.

6.1.44. $y = \dfrac{x-2}{x}$.

Выяснить, какие из следующих функций являются монотонными, какие — строго монотонными, а какие — ограниченными:

6.1.45. $f(x) = c$.

6.1.46. $f(x) = \sin^2 x$.

6.1.47. $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

6.1.48. $f(x) = -x^2 + 2x$.

6.1.49. $f(x) = \dfrac{x+2}{x+5}$.

6.1.50. $f(x) = [x]$ (см. задачу 6.1.27).

6.1.51. Вычислить значения гиперболических функций:

$\operatorname{sh} 0$, $\operatorname{ch} 0$, $\operatorname{th} 0$, $\operatorname{sh} 1$, $\operatorname{ch}(\ln 2)$.

6.1.52. Доказать тождества:

1) $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$;

2) $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$;

3) $\operatorname{ch}^2 x = \dfrac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2}$;

4) $\operatorname{sh}^2 x = \dfrac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}$;

5) $\operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y = \frac{1}{2}[\operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y)]$;

6) $\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y = \frac{1}{2}[\operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{ch}(x-y)]$;

7) $\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y = \frac{1}{2}[\operatorname{sh}(x+y) + \operatorname{sh}(x-y)]$.

6.1.53. Функция y задана неявно. Выразить ее в явном виде.

1) $xy = 7$;

2) $x^2 + y^2 = 1$, $y \leqslant 0$.

1) При $x \neq 0$ из данного уравнения получим $y = \frac{7}{x}$.

2) Выражая y из данного уравнения, имеем $y = -\sqrt{1-x^2}$. ●

6.1.54. Функция y задана неявно. Там, где это возможно, выразить ее в явном виде:

1) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$;

2) $x + |y| = 1$;

3) $e^y - \sin y = x^2$.

6.1.55. Какие из следующих точек принадлежат графику уравнения $y + \cos y - x = 0$:

$$A(1;0), \quad B(0;0), \quad C\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right), \quad D(\pi-1;\pi)?$$

6.1.56. Кривая задана параметрически

$$\begin{cases} x = t - 1; \\ y = t^2 + 1. \end{cases}$$

1) Найти точки на графике при $t = 0$, $t = 1$, $t = -\sqrt{2}$.

2) Какие из следующих точек лежат на этой кривой:

$$A(1;5), \quad B\left(\frac{1}{2};\frac{13}{4}\right), \quad C(2;8), \quad D(0;1)?$$

Дополнительные задачи

Найти области определения функций:

6.1.57. $f(x) = \operatorname{ctg} x$.

6.1.58. $f(x) = \dfrac{x+2}{(x+2)(x-5)}$.

6.1.59. $f(x) = \arccos 3x$.

6.1.60. $f(x) = \dfrac{1}{\lg x}$.

6.1.61. $f(x) = \sqrt{x+5} - \sqrt{-8-x}$.

6.1.62. $f(x) = \dfrac{\log_7 x}{\sqrt[5]{x-3}}$.

6.1.63. $f(x) = e^{\ln x}$.

6.1.64. $f(x) = \arcsin(\log_3 x)$.

6.1.65. $f(x) = \sqrt{1-x^2} \cdot \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$.

6.1.66. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{2x+1}} - \sqrt[3]{\dfrac{x-2}{x+5}}$.

6.1.67. $f(x) = \cos \dfrac{1}{x} + \ln(x+1) + \sqrt[10]{\pi - x}$.

Найти множества значений функций:

6.1.68. $f(x) = 4 - x^2$.

6.1.69. $f(x) = |x| - \frac{1}{3}$.

6.1.70. $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$.

6.1.71. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

6.1.72. $f(x) = e^{x^2 - 2x - 3}$.

6.1.73. $f(x) = \frac{x}{|x|}$.

6.1.74. $f(x) = \sin x \cdot \cos x$.

6.1.75. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$.

6.1.76. $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $x \in [0; 5]$.

Найти $y(0)$, $y(2)$, $y\left(\frac{x}{2}\right)$, $y(t^2)$, $3y(5x)$ *для функции* $y(x)$:

6.1.77. $y(x) = \sqrt{2x + 7}$.

6.1.78. $y(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } x < 2, \\ 0 & \text{при } x = 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$

6.1.79. Решить уравнение $f(x) = f(1)$, где $f(x) = 4x^3 - 4x + 1$.

6.1.80. Выяснить, какие из следующих функций являются четными, какие — нечетными, а какие — функциями общего вида:

1) $y(x) = \frac{|x|}{x}$;

2) $y(x) = |x + 1| - |x - 1|$;

3) $\varphi(t) = |t - 2|$;

4) $z(y) = \ln y^3$;

5) $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{при } x \geqslant 0, \\ x & \text{при } x < 0; \end{cases}$

6) $f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{при } t > 0, \\ -t^2 & \text{при } t \leqslant 0; \end{cases}$

7) $h(\alpha) = \frac{\operatorname{arctg}^2 \alpha}{\alpha - 1}$;

8) $f(x) = c$.

6.1.81. Дана функция $f(x) = x$, $x \in [0; +\infty)$. Доопределить ее на интервале $(-\infty; 0)$ так, чтобы новая функция $g(x)$, определенная на интервале $(-\infty; +\infty)$, была:

1) четной;

2) нечетной;

3) функцией общего вида.

6.1.82. Выяснить, какие из следующих функций периодические, и определить их наименьший положительный период:

1) $y = \ln |x|$;

2) $y = |\cos x|$;

3) $y = 10$;

4) $y = \frac{\sin 5x}{\cos 4x - 2}$.

Построить графики функций:

6.1.83. $y = \ln x^2$.

6.1.84. $y = \big||x-2|-3\big|$.

6.1.85. $y = \dfrac{x-2}{x+3}$.

6.1.86. $y = -\sqrt{x} + 2$.

6.1.87. $y = \operatorname{cosec} x$.

6.1.88. $y = 1 - 3\ln x$.

6.1.89. $y = x \cdot \sin x$.

6.1.90. $y = 2^{\frac{1}{x}}$.

6.1.91. $y = |x+1| + |x-2|$.

6.1.92. $y = \arcsin|x|$.

6.1.93. $y = \dfrac{4x+5}{2x-1}$.

6.1.94. $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

6.1.95. $y = \operatorname{sign} x$ (читается *сигнум* x), где $\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ -1 & \text{при } x < 0. \end{cases}$

6.1.96. Найти сложные функции $f \circ f$, $f \circ g$ и $g \circ f$, если:

1) $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 2$;

2) $f(x) = \operatorname{sign} x$ (см. задачу 6.1.95), $g(x) = -2$;

3) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$, $g(x) = \dfrac{x-1}{x}$;

4) $f(x) = [x]$, $g(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

Какие из следующих функций имеют обратные? Для таких функций найти обратные функции.

6.1.97. $y = \dfrac{x}{1-x}$.

6.1.98. $y = 2^{x-3}$.

6.1.99. $y = \begin{cases} 2x & \text{при } x \geqslant 0, \\ -x^2 & \text{при } x < 0. \end{cases}$

6.1.100. $y = \operatorname{sign} x$ (см. задачу 6.1.95).

Выяснить, какие из следующих функций монотонные, какие — строго монотонные, а какие — ограниченные:

6.1.101. $y = 2^{-x^2}$.

6.1.102. $y = \sqrt{x-2}$.

6.1.103. $y = \dfrac{|x|}{x}$.

6.1.104. $y = x^3 - x$.

6.1.105. $y = \dfrac{3x+5}{x+1}$.

6.1.106. $y = \begin{cases} -3 & \text{при } x < 0, \\ x & \text{при } x \geqslant 0. \end{cases}$

6.1.107. Доказать тождества:

1) $1 - \operatorname{th}^2 x = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;

2) $\operatorname{cth}^2 x - 1 = \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$;

3) $\operatorname{sh}(\ln x) = \dfrac{x^2-1}{2x}$;

4) $\operatorname{ch}(\ln x) = \dfrac{x^2+1}{2x}$;

5) $\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x = e^x$;

6) $\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}$.

Построить графики уравнений:

6.1.108. $xy = 0$.

6.1.109. $|x| + |y| = 1$.

6.1.110. $xy = y^3$.

6.1.111. $x^2 - y^2 = 0$.

Более сложные задачи

6.1.112. Пусть $D(f_1) = X_1$, $D(f_2) = X_2$. Доказать, что $D(f) = X_1 \cap X_2$ в любом из следующих случаев:
1) $f(x) = f_1(x) \pm f_2(x)$;
2) $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$.

6.1.113. Записать одной формулой функцию, область определения которой состоит из:
1) одной точки;
2) двух точек;
3) множества всех целых чисел.

6.1.114. Привести пример функции $f(x)$, для которой:
1) $D(f) = E(f)$;
2) $D(f) \supset E(f)$;
3) $D(f) \subset E(f)$.

6.1.115. Найти множество значений функции:
1) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$;
2) $f(x) = \arcsin \dfrac{x^2+1}{2x}$;
3) $f(x) = \dfrac{|x|}{|x|+1}$.

6.1.116. Записать одной формулой функцию, область значений которой состоит из:
1) одной точки;
2) двух точек;
3) множества всех целых чисел.

6.1.117. Пусть $E(f_1) = X_1$, $E(f_2) = X_2$. Верно ли, что:
1) $E(f_1 + f_2) = E(f_1) \cap E(f_2)$;
2) $E(f_1 + f_2) = E(f_1) \cup E(f_2)$?

6.1.118. Могут ли существовать такие функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, что $E(f_1) = E(f_2) = \mathbb{R}$, но:
1) $E(f_1 + f_2) = \{1\}$;
2) $E(f_1 \cdot f_2) = \{2\}$?
Ответ объяснить.

6.1.119. Доказать, что:
1) сумма, разность и произведение двух четных функций есть четная функция;
2) произведение двух нечетных функций есть четная функция;

3) сумма двух нечетных функций есть нечетная функция;

4) произведение четной и нечетной функции есть нечетная функция.

6.1.120. Верно ли, что сумма четной и нечетной функции есть четная функция? нечетная функция? Ответ пояснить.

6.1.121. Какая функция, определенная на всей действительной оси, является и четной и нечетной одновременно? Показать, что такая функция единственна.

6.1.122. Пусть $f(x)$ — произвольная функция с симметричной относительно нуля областью определения. Доказать, что:

1) функция $f(x) + f(-x)$ — четная;

2) функция $f(x) - f(-x)$ — нечетная.

6.1.123. Пусть функция $f(x)$ периодическая и имеет период T. Доказать, что функция $f(kx + b)$, где $k \neq 0$, также периодическая с периодом $\frac{T}{k}$.

6.1.124. Пусть функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ периодические с периодами T_1 и T_2 соответственно. Доказать, что любое положительное число, кратное T_1 и T_2, является периодом функций $f_1 \pm f_2$, $f_1 \cdot f_2$.

6.1.125. Обозначим через $D(x)$ *функцию Дирихле*:

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{при рациональных } x, \\ 0 & \text{при иррациональных } x. \end{cases}$$

Доказать, что:

1) периодом этой функции является любое рациональное число, большее нуля (поэтому у этой периодической функции нет наименьшего положительного периода);

2) никакое иррациональное число не является периодом этой функции.

6.1.126. Доказать, что следующие функции не являются периодическими:

1) $f(x) = \cos x^2$;

2) $f(x) = \sin |x|$;

3) $f(x) = x \cdot \sin x$;

4) $f(x) = \ln \cos x$.

6.1.127. Найти наименьший положительный период функций:

1) $y = \cos^2 x - \sin^2 x$;

2) $y = |\sin 2x|$;

3) $y = \sin^4 \frac{x}{2} + \cos^4 \frac{x}{2}$.

6.1.128. Доказать, что:

1) график функции $y = |f(x)|$ получается из графика функции $y = f(x)$ так: часть графика, расположенная не ниже оси Ox, остается без изменений, а «нижняя» часть графика симметрично отражается относительно оси Ox;

2) график функции $y = f(|x|)$ получается из графика функции $y = f(x)$ так: правая часть графика (при $x \geqslant 0$) остается без изменений, а вместо «левой» строится симметричное отражение «правой» относительно оси Oy.

Построить графики функций:

6.1.129. $y = \cos^2 x$.

6.1.130. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

6.1.131. $y = \arcsin(\sin x)$.

6.1.132. $y = x + \sin x$.

6.1.133. $y = \operatorname{sign}(\cos x)$.

6.1.134. $y = |x| + |x+1| + |x+2|$.

6.1.135. $y = \log_3(\sin x)$.

6.1.136. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x+1}{x}}$.

6.1.137. Решить графически уравнения:
1) $|x-3| - x - 1 = 0$;
2) $x^3 + 2x - 4 = 0$;
3) $\ln x + x = 1$.

6.1.138. Решить графически неравенства:
1) $x^3 > x$;
2) $2^x + x > 0$;
3) $\sin x \leqslant \frac{1}{2}$.

6.1.139. Найти $f(x)$, если известно, что
1) $f(x+2) = \dfrac{3}{x-5}$;
2) $f(x^3) = x^2 + 4$;
3) $f\left(\dfrac{x-2}{x-3}\right) = x + 1$.

6.1.140. Доказать, что существует только одна функция $f(x)$, определенная на всей числовой оси, такая, что для любой функции $g(x)$, также определенной на всей оси, справедливо равенство

$$f \circ g = g \circ f.$$

Найти эту функцию.

6.1.141. Существуют ли функции, обратные сами себе? Ответ обосновать.

6.1.142. Что можно сказать о графике функции, обратной самой себе?

6.1.143. Доказать, что четная функция не может быть строго монотонной.

6.1.144. Доказать, что:
1) сумма двух возрастающих (убывающих) функций — также возрастающая (соответственно, убывающая) функция;
2) сумма, разность и произведение двух ограниченных функций — также ограниченная функция.